

Pythagorejská matematika vo svetle karteziánskej fyziky¹

Ladislav Kvasz —

Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy, Praha

Filosofický ústav Akademie věd ČR, v. v. i., Praha

kvasz@flu.cas.cz

Predkladaná stať nadväzuje na článok „Thalétova matematika v zrkadle Galileovej fyziky“² a snaží sa rozšíriť argumentáciu v prospech autenticity Thalétovej matematiky na Pythagora. V predošlom článku sme ukázali, že geometrické poznatky pripisované tradíciou Thalétovi vykazujú jednotný kognitívny štýl, ktorý nie je možné vysvetliť, ak predpokladáme, že tieto poznatky boli Thalétovi pripísané neskoršími autormi. Ako v predošlom článku, aj teraz argumentujeme nepriamo. Pokúsime sa ukázať, že to, čo tradícia pripisuje Pythagorovi ako matematikovi, dáva z kognitívneho hľadiska zmysel. Súhlasíme s Burkertom, že: „všeobecný problém týkajúci sa tohto druhu [t. j. nepriamych] rekonštrukcií v dejinách vedy je ten, že fakt logickej inferencie nikdy nemôže určiť presne dobu alebo miesto tejto inferencie, alebo osobu, ktorá ju uskutočnila.“³ Naše argumenty tak nemôžu ukazovať k osobe Pythagora, ale iba k niekomu medzi Thalétom a Platónom.⁴

Stať má štyri časti. V prvej pripomenieme epistemologické nedostatky Thalétovej matematiky, predovšetkým absenciu skladobnej a deduktívnej syntézy. Ako prirodzený smer rozvoja najstaršej gréckej matematiky by sme očakávali snahu tieto nedostatky prekonať a Thalétovu matematiku doplniť o chýbajúce druhy syntézy. A skutočne, to, čo poznáme ako tradičnú čínsku matematiku možno charakterizovať ako úspešné završenie tejto snahy. Pri-

1 Chcel by som sa poďakovať Matyášovi Havrdovi, Jiřímu Hudečkovi, Paľovi Labudovi a Vladislavovi Suvákovi za podnetné diskusie. Článok je súčasťou projektu „Formálna epistemológia – budúca syntéza“, podporeného v rámci programu *Praemium Academicum* Akadémie Vied Českej republiky.

2 Kvasz, L., Thalétova matematika v zrkadle Galileovej fyziky. *Filosofický časopis*, 62, 2014, č. 5, s. 643–659.

3 Burkert, W., *Lore and Science in Ancient Pythagoreanism*. Cambridge, Mass., Harvard University Press 1972, s. 405.

4 Asi by sme mali všade dávať Pythagorovo meno úvodzoviek. No po úvahe sme sa rozhodli, že tak nebudeme činiť a spofahneme sa na čitateľa, že si všade v ďalšom texte úvodzovky primyslí.

klad čínskej matematiky ukazuje, že nedostatky Thalétovej matematiky bolo možné prekonať v jej rámci. Je však pozoruhodné, že s niečím podobným sa v dejinách gréckej matematiky prakticky nestretávame.⁵ Zo starovekého Grécka sa nedochoval text, v ktorom by boli do rámca thalétovskej matematiky zabudované prvky skladobnej a deduktívnej syntézy. Gréci matematici namiesto vylepšovania thalétovskú matematiku opúšťajú.⁶ *Prvým (nepriamym) argumentom v prospech autenticity Pythagora ako matematika* je, že grécka matematika opúšťa rámec thalétovskej matematiky preto, lebo sa zrodilo niečo omnoho účinnejšie než všetko, čo je možné dosiahnuť reformou thalétovskej matematiky – pythagorejská aritmetika.⁷ Tá priniesla podstatne účinnejšiu skladobnú a deduktívnu syntézu, než akú poznala čínska matematika. Skladobná a deduktívna syntéza založená na aritmetizácii matematiky umožňuje dokázať väčší počet viet než thalétovská matematika obohatená o skladobnú a deduktívnu syntézu čínskeho typu.

V druhej časti state ukážeme, že pythagorejská matematika je organickou súčasťou procesu idealizácie v matematike. Najprv opíšeme druhé štádium idealizácie vo fyzike, ktorým je *karteziánska fyzika*. Pythagorejskú matematiku vyložíme ako paralelné štádium idealizácie v matematike, ktoré nadväzuje na thalétovskú matematiku a je odpoveďou na jej epistemologické nedostatky, tak ako karteziánska fyzika je odpoveďou na epistemologické nedostatky galileovskej fyziky. *Druhým (nepriamym) argumentom v prospech autenticity Pythagora ako matematika* je vysoká miera zhody medzi pythagoreizmom a karteziánstvom⁸: 1. Obe školy podkladajú pod oblasť javov *matematickú ontológiu* (vo forme čísel respektíve geometrickej substance). 2. Táto *ontológia plní rovnakú funkciu*, ktorou je doplniť teóriu predchádzajúceho štádia (thalétovskú geometriu respektíve galileovskú mechaniku)

5 Jedinou výnimkou je fragment Hippokrata z Chia, ktorý obsahuje skladobnú syntézu vo forme prikladania geometrických útvarov a deduktívnu syntézu ako pridávanie a uberanie rovnakých častí. (Pozri Šír, Z. (ed.), *Řecké matematické texty*. Praha, Oikúmené 2011, s. 75–87.)

6 Príklad čínskej matematiky posilňuje plauzibilitu našej argumentácie v predošlom článku. To, že čínska matematika má princíp skladobnej a deduktívnej syntézy zabudovaný do rámca, ktorý pripomína thalétovskú geometriu, ukazuje, že neprítomnosť tejto syntézy u Thaléta je charakteristickou črtou jeho systému. Nie, že by sa skladobná a deduktívna syntéza nedali do tohto systému zabudovať, ale Thalés to neurobil.

7 Naša argumentácia pripomína karteziánsku argumentáciu proti zotrvačnosti kruhového pohybu. Keď Descartes pochopil, že *prirodzený pohyb* je priamočiary, uvedomil si, že kruhový tvar trajektórií planetárnych pohybov sa od priamočiareho smeru neustále *odchyľuje*, a teda musí existovať *príčina*, ktorá toto odchyľovanie vysvetlí. My podobne vnímame typ skladobnej a deduktívnej syntézy objavený v rámci čínskej matematiky ako *prirodzené smerovanie* vývinu matematiky. Skladobnú a deduktívnu syntézu založenú na aritmetike považujeme za *odchýlku* od prirodzeného smerovania, ktorá musí mať *príčinu*, a tou príčinou je zrod pythagoreizmu.

8 Logika tohto argumentu vychádza z predpokladu, že analógia medzi pythagorejskou matematikou a karteziánskou fyzikou nie je náhodná, ale odráža spoločnú epistemologickú štruktúru týchto teórií, tvoriacich druhú etapu procesu idealizácie.

o skladobnú a deduktívnu syntézu. 3. Po krátkom období úspechov (v dôsledku vyššej expresívnej sily ich jazykových rámcov) sa v oboch *objaví spor* a sú opustené. 4. V oboch prípadoch vzniká finálna paradigma (Euklidovej geometrie respektíve Newtonovej fyziky) *radikálnym prebudovaním* týchto teórií tak, aby sa spor odstránil. 5. V dôsledku tohto prebudovania je možné základné pojmy novej paradigmy vyložiť ako *pojmy vzniklé transformáciou* zodpovedajúcich pojmov karteziánskej fyziky respektíve pythagorejskej matematiky. 6. Transformácia základných pojmov *zachováva odlišenie fenomenálnej a ontickej úrovne opisu*, ktoré bolo hlavným prínosom karteziánskej fyziky respektíve pythagorejskej matematiky. 7. Aj keď sa ontická rovina zachováva, *mení sa druh objektov, tvoriacich ontologický substrát*: Čísla sú nahradené úsečkami a rozpriestranené veci telesami. 8. Zásadne sa mení aj *spôsob prepojenia* fenomenálnej a ontickej vrstvy, keď ontická vrstva začína byť metodologicky reglementovaná. 9. Po vzniku finálnej paradigmy karteziánska fyzika aj pythagorejská matematika *degeneruje na súbor nezrozumiteľných bizarností*. 10. Obom teóriám je nakoniec *upieraný status vedeckosti* – podobne ako je Descartovi upierané miesto v dejinách fyziky, narážame u Burkerta na pokus uprieť Pythagorovi miesto v dejinách matematiky.⁹

V tretej časti state uvedieme hlavné námietky Waltera Burkerta proti autentickejši správ o Pythagorovi ako matematikovi. Burkert systematicky, na rozsahu vyše 400 strán analyzoval všetky dochované správy o Pythagorovi a pythagorejcoch, aby zdôvodnil tézu, že Pythagoras bol náboženský reformátor (*hierofant*) a matematické výsledky mu boli pripísané až dodatočne. Rozborom najstarších správ o Pythagorovi, nazývaných *akuzmata*, Burkert dospel k záveru, že Pythagoras bol predovšetkým autorom náboženského učenia. Matematické poznanie, ktoré mu je pripisované neskoršími autormi, je v porovnaní s akuzmatami racionálnejšie, preto údajne nepochádza od samotného Pythagora.

Pokusíme sa ukázať, že tento výklad sa zakladá na racionalistickej predpojatosti, odmietajúcej tej istej osobe priznať súčasne autorstvo racionálnej matematickej teórie a iracionálnych náboženských povier. V argumentácii proti tejto predpojatosti chceme využiť prácu na rozhraní vedy a nábožen-

9 Každý z desiatich bodov vyžaduje zdôvodnenie (uvedené nižšie). Ale aj bez tohto zdôvodnenia existencia desiatich bodov dotyku medzi karteziánskou fyzikou a pythagorejskou matematikou ilustruje náš argument. Pythagoras je nielen autorom určitých matematických výsledkov, z ktorých niektoré mu mohli byť pripísané, ale predovšetkým je tvorcom jazykového rámca, ktorý predstavuje jasne definované štádium procesu idealizácie. Až prekonaním tohto štádia a odmietnutím tohto rámca sa rodí matematika, ktorej výsledky možno niekomu pripisovať. Podobne ako u Thaléa ani u Pythagora však toto pripisovanie nie je plauzibilné, lebo obom sú pripisované výsledky, ktoré majú jednotný kognitívny štýl, ktorý nemohol byť údajným pripisovateľom zrozumiteľný (a nie to, aby sa ho konzistentne pridŕžovali).

stva.¹⁰ Zdá sa, že podobné koincidencie sa v histórii vyskytujú častejšie. Podľa nášho názoru objav novej racionálnej paradigmy vedie k *reštrukturalizácii kognitívneho systému*. Táto reštrukturalizácia často prináša *uvedomenie si nových možností racionálneho poznania* a je sprevádzaná *silnými emóciami*. Iracionálne presvedčenia sú tak výrazom (alebo ventilom) emócií spojených s objavom. Takže iracionálne presvedčenia často *nie sú protikladom, ale príznakom objavov* v oblastiach, ako je matematika alebo fyzika. Preto podľa nás povesti o Pythagorovi ako divotvorcovi neznižujú pravdepodobnosť jeho autorstva nového pojatia matematiky.

Podobnosť pythagorejských *akuzmat* a náboženských predpisov spočíva na *funkčnej analógii* a nie na *historickej príbuznosti*. Podľa nás Pythagoras nebol (napriek Burkertom zhromaždenej evidencii) náboženským reformátorom (*hierofantom*), ale zakladateľom matematiky. Pythagorejské akuzmata, aj keď pripomínajú starodávne náboženské príkazy, nie sú s nimi príbuzné a netvorí pôvodnejšiu vrstvu pythagorejského učenia než matematika. To, že matematické poznatky, uvádzané v súvislosti s Pythagorom, pôsobia (a často aj sú) mladšie, je dané tým, že v matematickej tradícii, na rozdiel od akuzmatickej, prevláda tendencia nahradzovať staršie formulácie mladšími (presnejšími, jasnejšími, a všeobecnejšími). Sme však presvedčení, že tieto mladšie, presnejšie a všeobecnejšie formulácie stoja na mieste starších, nepresných a konkrétnych poznatkov, ktoré sú súčasné s prvými akuzmatami a svojim pôvodom siahajú až k Pythagorovi. Tejto najstaršej pythagorejskej matematike možno totiž rozumieť ako odpovedi na epistemické nedostatky thalétovskej matematiky.

V súčasnosti panuje konsenzus o zásadnom význame Burkertovej knihy pre výklad dejín pythagoreizmu. Dnes už nik nemôže vziať existenciu rane pythagorejskej matematiky za takú samozrejmu, akou sa zdala pred vyjdením Burkertovej knihy. Za prvého pythagorejského matematika je spravidla považovaný až Archytas z Tarentu.¹¹ Aj keď je Burkertova téza o neautentickeosti obrazu Pythagora ako matematika široko akceptovaná a Reviel Netz dokonca napísal, že „Pythagoras ako matematik zomrel s konečnou platnosťou roku 1962“,¹² opačný názor nie je úplne opustený. Existuje prúd klasických filológov (ako napríklad Leonid Zhmud), ktorí argumentujú v prospech autentickeosti správ o Pythagorovi ako matematikovi. Predkladanú stať možno chápať ako príspevok snažiaci sa doplniť argumentáciu týchto filológov o nový typ argumentov.

10 Pozri Kvasz, L., Transcendencia vo vede a v náboženstve. *Studia theologica*, 8, 2006, č. 2, s. 1–19.

11 Pozri Netz, R., The Problem of Pythagorean Mathematics. In: Huffman, C. A. (ed.), *A History of Pythagoreanism*. Cambridge, Cambridge University Press 2014, s. 167–184.

12 Netz, R., *The Shaping of Deduction in Greek Mathematics*. Cambridge, Cambridge University Press 1999, s. 272. Rok 1962 je rokom vydania pôvodnej nemeckej verzie Burkertovej knihy.

1. Thalétova matematika a prekonávanie jej epistemických nedostatkov

V článku „Thalétova matematika v zrkadle Galileovej fyziky“ je rad epistemologických charakteristík Thalétovej matematiky.¹³ Uvedieme ich prehľad, aby sme mohli sledovať ich prekonávanie.

A. Absencia deduktívnej syntézy: Dôkazy sú jednokrokové, majú povahu bezprostredného nahliadnutia pravdivosti dokazovaného tvrdenia. Zdá sa, že jazyk Thalétovej geometrie neumožňuje spájať tvrdenia do deduktívnych reťazcov príčin a dôsledkov. **B. Absencia skladobnej syntézy:** Tvrdenia sa týkajú jednoduchých (nezložených) geometrických útvarov. V Thalétovej geometrii chýba princíp, ktorý by umožňoval spájať jednoduché útvary v zložitejšie celky. **C. Princíp zhodnosti:** Vo vetách sa tvrdí zhodnosť alebo rovnosť prvkov určitého útvaru (uhlov nad priemerom, uhlov pri základni rovnoramenného trojuholníka). **D. Princíp manipulácie:** Dôkazy sa opierajú o manipuláciu (skutočnú či v predstave) s geometrickým útvarom, ktorý má určitú symetriu, a tak sa pri manipulácii nemení. (Napríklad dôkaz tvrdenia, že oproti zhodným stranám v trojuholníku ležia zhodné uhly, sa pravdepodobne zakladal na jeho preklopení podľa osi tretieho uhla.) **E. Absencia pojmu podobnosti:** Thalés nemal pojem podobnosti (keby ho mal, nemusel by pri meraní výšky pyramídy čakať na okamih, kedy má predmet rovnakú dĺžku ako jeho tieň). To znamená, že nechápal jednotu všetkých podobných útvarov a dával do súvisu iba zhodné útvary. **F. Nedostatočná všeobecnosť:** Síce pred každou vetou je všeobecný kvantifikátor: *každý* priemer delí kruh na rovnaké časti, *každý* uhol nad priemerom je pravý. Tieto tvrdenia sa však týkajú iba špeciálnych javov. Síce každý uhol nad priemerom je pravý, ale táto veta vypovedá iba o kruhu rozpolenom priemerom. Keď ju porovnáme s vetou, že stredový uhol je dvojnásobkom obvodového,¹⁴ vidíme, že Euklidova veta sa týka uhlov nad ľubovoľnou tetivou. Thalétova veta je jej špeciálnym prípadom, keď za stredový uhol zvolíme 180° .¹⁵ Vývoj matematiky sa vyznačuje prekonaním tých-

13 Kvasz, L., Thalétova matematika v zrkadle Galileovej fyziky, c.d. Epistemické charakteristiky sme použili ako argument proti predstave, že Proklus a Diogenes Laertský mohli Thalétovi pripisovať poznatky s týmito charakteristikami. V ich dobe už matematika tieto obmedzenia prekonala a nedokážeme si predstaviť, ako mohli pozbierať matematické poznatky s tak vysokou mierou epistemologickej súdržnosti. Proklus však žil v 5. storočí n. l., a tak vzniká námietka, že k pripísaniu mohlo dôjsť prv. Musíme si však uvedomiť, že matematika prekonala absenciu skladobnej a deduktívnej syntézy už v dobe Platóna a tak náš argument ukazuje, že k prípadnému pripísaniu muselo dôjsť pred 4. storočím pr. n. l. Je preto pravdepodobnejšie, že nejde o pripísanie, ale o autentickú tradíciu, siahajúcu k samým počiatkom gréckej vedy.

14 Euklides, kniha III, veta 20. Český preklad v: Šír, Z. (ed.), *Řecké matematické texty*, c.d., s. 151.

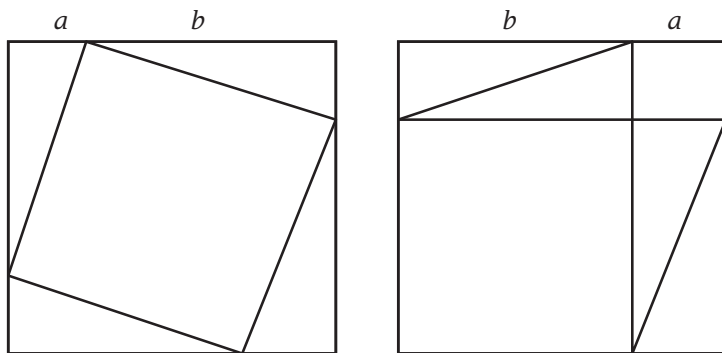
15 Tento bod by bolo možné, v zhode s prvými dvomi, označiť ako *absenciu kategoriálnej syntézy*.

to nedostatkov.¹⁶ K prekonaniu však došlo dvoma rôznymi spôsobmi, ktoré predvedieme na dôkaze Pythagorovej vety.

1.1 Spôsob prekonania nedostatkov Thalétovej matematiky v starovekej Číne

Pre výklad dejín starovekej čínskej matematiky tu niet miesta. Zo starovekej Číny sa dochovali texty obsahujúce matematické tvrdenia sprevádzané dôkazom.¹⁷ Okrem iných tvrdení čínski matematici poznali aj dôkaz Pythagorovej vety.¹⁸ Ukážeme si mierne modifikovanú verziu tohto dôkazu, ktorá je technicky jednoduchšia než verzia uvedená Juškevičom.

Uvažujme dva štvorce so stranou $(a + b)$, vytvorené zo štyroch pravouhlých trojuholníkov s preponou c a odvesnami a a b ako na obrázku. Na prvom obrázku je štvorec so stranou $a + b$ zložený zo štyroch pravouhlých trojuholníkov a jedného štvorca so stranou c . Na druhom obrázku, ktorý vznikne z prvého preskupením trojuholníkov, je rovnaký štvorec zložený z rovnakých trojuholníkov a dvoch štvorcov – jedného so stranou a a druhého so stranou b . Keďže oba štvorce sú zhodné a príslušné trojuholníky tiež, zhodujú sa aj zvyšné obsahy. Preto obsah štvorca nad preponou sa rovná súčtu obsahov štvorcov nad odvesnami.



16 Uvedených šesť bodov (A–F) súvisí s potencialitami jazyka matematiky, ako sú *logická*, *expresívna* alebo *metodická* sila. (Viz Kvasz, L., *Jazyk a zmena. Ako sme menili jazyk matematiky a ako jazyk matematiky zmenil nás*. Praha, Filosofia 2012.) Možno povedať, že *absencia deduktívnej syntézy* je obmedzením logickej sily jazyka; *absencia skladobnej syntézy* je obmedzením jeho expresívnej sily a *princíp zhodnosti* je obmedzením jeho metodickkej sily. Epistemické nedostatky Thalétovej geometrie nie sú teda niečím nahodilým, ale ide o jav charakteristický pre vývin matematiky. To len ďalej podporuje tézu o autenticite Thalétovej matematiky. Epistemické nedostatky tvrdení údajne pripísaných Thalétovi sa totiž týkajú presne tých aspektov jazyka, ktorých nárast je charakteristický pre vývin matematiky. Uvedený zoznam tak dokladá, že Thalétovej matematike chýbalo presne to, čo možno očakávať od jazyka raného vývojového štádia jazyka matematiky.

17 Pozri Hudeček, J., *Matematika v devíti kapitolách*. Praha, Matfyzpress 2008.

18 Juškevič, A. P., *Dějiny matematiky ve středověku*. Přel. kol. př. Praha, Academia 1978, s. 68 a 69.

Tento dôkaz sa odohráva v jazykovom rámci blízkom thalétovskej geometrii – opiera sa o *princíp zhodnosti* a jeho základným nástrojom je *manipulácia* (v skutočnosti alebo v predstave) s geometrickými objektmi (trojuholníkmi). Ale prekonáva mnohé z nedostatkov Thalétovej geometrie: **A. Prekonáva absenciu skladobnej syntézy:** objekt, ktorého sa dôkaz týka, je *zložený* zo štvorcov a trojuholníkov. Skladobnou syntézou je *kladenie geometrických útvarov vedľa seba*. **B. Prekonáva absenciu deduktívnej syntézy:** dôkaz nespočíva v bezprostrednom nahliadnutí pravdivosti tvrdenia – bezprostredne nevidíme, že obsah štvorca nad c je rovnaký ako súčet obsahov štvorcov nad a a b . K pravdivosti tvrdenia dospievame v troch krokoch. V prvom kroku si musíme uvedomiť, že oba štvorce so stranou $a + b$ majú zhodný obsah. V druhom kroku si musíme uvedomiť, že v oboch štvorcoch sú prítomné štyri zhodné pravouhlé trojuholníky. V treťom kroku použijeme princíp pripomínajúci tretiu Euklidovu axiómu: *Keď od zhodných uberieme zhodné, zvyšky sú zhodné*. **C. Prekonáva aj princíp zhodnosti:** veta netvrdí zhodnosť útvarov, ale rovnosť veličín.

Zvyšné epistemologické nedostatky Thalétovej matematiky ostávajú v platnosti. **D. Princíp manipulácie je zachovaný** (ak nie úplne, tak aspoň do veľkej miery): druhý obrázok, o ktorý sa dôkaz opiera, vzniká preskúpaním konfigurácie prvého obrázka.¹⁹ **E. Absencia pojmu podobnosti:** dôkaz sa zakladá na skutočnosti, že tie isté útvary (štyri zhodné pravouhlé trojuholníky s odvesnami a a b) umožňujú vytvoriť dve rôzne konfigurácie. Teda dôkaz sa zakladá na identifikácii zhodných útvarov a následnom odvodení pravdivosti výsledného tvrdenia. **F. Absencia všeobecnosti:** dokázaná veta je *špeciálnym prípadom* kosínusovej vety ($c^2 = a^2 + b^2 - 2bc \cdot \cos \gamma$) pre prípad *špeciálnej hodnoty parametra* γ (90 stupňov, kedy $\cos \gamma$ je rovné nule a teda $c^2 = a^2 + b^2$). Euklides formuluje tvrdenie ekvivalentné s našou kosínusovou vetou.²⁰

Uvedený dôkaz sme uviedli preto, lebo predstavuje *prirodené nadviazanie na Thalétovu geometriu*. Nie je nič prirodzenejšie, než pokúsiť sa do jazyka thalétovskej matematiky zabudovať skladobnú a deduktívnu syntézu tým istým spôsobom ako v tomto dôkaze. Je pozoruhodné, že táto vrstva jazyka vo starovekom Grécku takmer úplne absentuje.²¹

19 Verzia dôkazu uvedená Juškevičom manipuláciu neobsahuje, používa iba jeden obrázok a manipulácie nahrádza algebraickými úpravami. Domnievame sa však, že je prepracovanou verziou dôkazu, ktorý uvádzame.

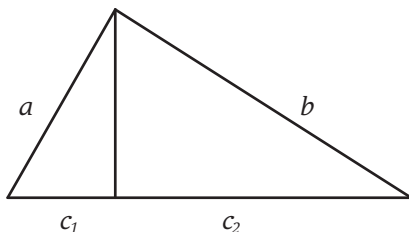
20 Euklides, kniha II, vety 12 a 13. Český preklad pozri v: Eukleides, *Základy. Knihy I–IV*. Prel. F. Servít, vydání komentované P. Vopěnkou. Nymburk, OPS 2007, s. 90.

21 Výnimku tvorí len fragment týkajúci sa Hippokratových mesačikov. Pozri Šír, Z. (ed.), *Řecké matematické texty*, c.d., s. 74–86.

1.2 Spôsob prekonania nedostatkov Thalétovej matematiky v starovekom Grécku

Ako príklad ilustrujúci alternatívny spôsob prekonania absencie skladobnej a deduktívnej syntézy v thalétovskej matematike možno vziať dôkaz Pythagorovej vety uvedený B. L. Van der Waerdenom v knihe *Die Pythagoreer*.²² Van der Waerden uvádza tento dôkaz ako pravdepodobnú rekonštrukciu pôvodného Pythagorovho dôkazu. Nezávisle od toho, či prijmeme argumenty v prospech autenticity tohto dôkazu, môžeme ho použiť ako príklad ilustrujúci určité *epistemologické princípy*. Po rozpoznaní týchto princípov môžeme hľadať kognitívny štýl, ktorý je na nich založený, a našu diskusiu tak urobiť nezávislou od správnosti van der Waerdenovej rekonštrukcie.

Obrázok použitý van der Waerdenom pri dôkaze Pythagorovej vety obsahuje jednu pomocnú čiaru, ktorá delí trojuholník na dva podobné.²³ Dôkaz pozostáva z evidencií a kalkulatívnych krokov:



Z podobnosti malého trojuholníka s celým dostávame

$$a : c_1 = c : a \quad \text{preto} \quad a^2 = c \cdot c_1$$

analogicky

$$b : c_2 = c : b \quad \text{preto} \quad b^2 = c \cdot c_2$$

Sčítaním oboch identít uvedených vpravo máme

$$a^2 + b^2 = c \cdot c_1 + c \cdot c_2 = c \cdot (c_1 + c_2) = c^2$$

V dôkaze máme do činenia so štyrmi krokmi: 1. Podobnosť trojuholníkov zapíšeme ako rovnosť pomerov dĺžok zodpovedajúcich strán. 2. Tieto pomery upravíme podľa pythagorejského princípu, že súčin vonkajších členov pomeru je rovný súčinu jeho vnútorných členov. 3. Takto vzniklé identity sčítame. 4. Výsledok upravíme podľa distributívneho zákona. Oproti thalé-

²² Waerden, B. L. van der, *Die Pythagoreer*. Zürich, Artemis Verlag 1979, s. 358 a 359.

²³ Namiesto prikladania trojuholníkov (ako v čínskom dôkaze) sa pridáva pomocná čiara. Ešte nie na základe postulátu, ako u Euklída, ale aj tak prechod od prikladania zhodných útvarov k dopĺňaniu pomocných čiar je pokrok v skladobnej syntéze. Prikladanie útvarov kopíruje manipulácie s predmetmi nášho okolia a tak prenáša antropomorfnú perspektívu na svet geometrie. Až skladobná syntéza vo forme konštrukcie pomocou kružidla a pravítka umožňuje deduktívnu výstavbu geometrie. Prechod k pomocným čiaram je krokom na tejto ceste.

tovskej matematike tu máme *skladobnú syntézu prvkov útvaru* (dvoch trojuholníkov, na ktoré sme rozdelili pôvodný trojuholník) ako aj *syntézu štyroch krokov dôkazu*. Ešte to nie je *konštrukčne-deduktívna syntéza* Euklidových *Základov*, ale *aritmetická syntéza*. Geometrické útvary sú zasadené do siete súvislostí pomocou *aritmetických vzťahov* a dôkaz sa zakladá na *aritmetických úpravách* týchto vzťahov.

Okrem *aritmetickej povahy* deduktívnej a skladobnej syntézy sa uvedený dôkaz vyznačuje aj nárastom všeobecnosti. Pravidlo, že *v každom pomere je súčin vonkajších členov rovný súčinu vnútorných členov*, ktoré sme použili pri dôkaze, má iný typ všeobecnosti než vety Thalétovej geometrie. Toto pravidlo možno použiť na ľubovoľné útvary. Netvrdí identitu uhlov či dĺžok, ale napríklad od zrejmeého vzťahu $a : c_1 = c : a$, ktorý vyplýva z podobnosti, umožňuje prejsť ku vzťahu $a^2 = c \cdot c_1$, ktorý už nie je zrejmy. Nejde teda o nejaký fakt, ale o pravidlo vzäzujúce dva fakty.²⁴

Aby mohli rôzne javy dávať do súvisu, pythagorejci postulovali spoločnú jednotku, ktorá umožňuje preniesť vzťahy z jedného javu na druhý. Spoločná jednotka zabezpečuje zjednotenie javov do spoločnej *kalkulatívno-argumentačnej schémy*. Argumentácia ešte nemá povahu dedukcie, ako u Euklida, ale ide o *manipuláciu s číslami*. Takto pythagorejská aritmetická syntéza pripomína Thalétovu *manipuláciu*. Na rozdiel od nej však nemanipuluje s *predmetmi*, ale s *číslami*. Aby sme v analýze pythagorejskej matematiky mohli pokročiť ďalej, musíme pochopiť, čo sú čísla, na ktorých pythagorejci zakladajú skladobnú a deduktívnu syntézu. *Čísla sú ideálnymi objektmi predchádzajúcej idealizácie*. Tento poznatok vrhá svetlo na *zmysel pythagorejskej číselnej ontológie*. Na prvý pohľad sa táto ontológia môže javiť ako *prejav iracionálneho metafyzického sklonu*. Uvedený dôkaz však ukazuje, že číselná ontológia je plne racionálna – prináša skladobnú a deduktívnu syntézu, a tým koriguje epistemologické nedostatky Thalétovej matematiky.

1.3 Porovnanie uvedených dvoch dôkazov

Aby sme si ujasnili epistemologický prínos tohto dôkazu, prejdeme body, ktorými sme charakterizovali čínsky dôkaz, a pokúsime sa artikulovať povahu rozdielu medzi čínskym a pythagorejským dôkazom.

A. V čínskom dôkaze sa skladobná syntéza dosahuje *prikladaním zhodných geometrických útvarov* vedľa seba. Naproti tomu v pythagorejskom dôkaze má skladobná syntéza povahu *rozloženia útvaru na podobné útvary*, teda spočíva v spájaní prvkov rovnakého tvaru, ale rôznej veľkosti.

24 Pre dnešného čitateľa je zrozumiteľnejšie, keď pomery zapíšeme pomocou zlomkov $\frac{a}{c_1} = \frac{c}{a}$ a použijeme „násobenie do kríža“. Pythagorejské pravidlo vyjadruje rovnaký fakt ako naše násobenie do kríža.

B. Argumentácia čínskeho dôkazu sa opiera o *princíp zhodnosti*. Argumentačná syntéza pythagorejského dôkazu sa naproti tomu opiera o *kalkulatívne transformácie aritmetických vzťahov*.

C. Z hľadiska všeobecnosti sú čínsky a pythagorejský dôkaz viac-menej ekvivalentné.

D. Prevahu pythagorejského dôkazu vidíme v prekonaní princípu zhodnosti. Zavedenie pojmu podobnosti geometrických útvarov (útvary sú podobné, keď sú zodpovedajúce úsečky v rovnakých pomeroch) je hlavným prínosom pythagorejskej matematiky. Prevedením geometrických vzťahov na číselné pomery je možné dať do vzájomných vzťahov ako zhodné, tak i podobné útvary.

2. Karteziánska fyzika, pythagorejská matematika a proces idealizácie

V knihe *Zrod vedy ako lingvistická udalosť*²⁵ sme ukázali, že druhou etapou vzniku jazyka fyziky bola karteziánska fyzika, ktorá priniesla idealizáciu ontického substrátu prírody vo forme rozpriestranenej veci, teda geometrického telesa obdareného pohybom a povýšeného na substanciu. Podľa Descarta je matematický nielen jazyk, ktorým fyzika opisuje prírodu, ale aj substancja, ktorá prírodu tvorí. Obdarenie geometrických objektov pohybom a ich povýšenie na *ontický substrát* pripomína pythagoreizmus, ktorý podobne obdaril čísla *tvarom* (vo forme figurálnych čísel) a povýšil ich na *ontický substrát*. Aby sme tejto paralele porozumeli, opíšeme hlavné epistemologické inovácie a nedostatky karteziánskej fyziky a ich analógie v pythagorejskej matematike.

Okrem tejto heuristickej funkcie má karteziánska fyzika pre našu argumentáciu ďalší význam. Jeden z Burkertových argumentov proti pythagorejskej teórii čísel sa zakladá na tom, že skutočne deduktívnu, matematickú teóriu čísel Archyta z Tarentu stavia do kontrastu s rane pythagorejskou teóriou. Pythagorejská teória podľa neho nie je deduktívna a „vykazuje pozoruhodnú zmes výpočtov a číselnej symboliky, v ktorej ‚zmysel‘ je dôležitejší ako presnosť“.²⁶ Kvôli tomu ju z dejín matematiky vylučuje. Karteziánska fyzika je dôležitá, pretože pri jej výklade sa opakuje podobný epistemologický omyl: Karteziánska fyzika nie je matematická (ale *verbálna*), je výpočty sú často *chybné* a pri jej explanatorických modeloch je dôležitejší ich *zmysel* než presnosť. Existuje rad historikov, ktorí kvôli tomu Descarta z dejín fyziky vylučujú. Vyvrátenie tohto omylu pri interpretácii karteziánstva môžeme použiť pri obhajobe pythagoreizmu.

25 Kvasz, L., *Zrod vedy ako lingvistická udalosť*. Praha, Filosofia 2013.

26 Burkert, W., *Lore and Science in Ancient Pythagoreanism*, c.d., s. 400.

2.1 Epistemické inovácie a nedostatky karteziánskej fyziky

Aby sme Descartovu fyziku správne pochopili, musíme si uvedomiť, že Descartes bol podstatne lepši matematik než Galileo: bol tvorcom analytickej geometrie a dnešnej algebraickej symboliky. Kde Galileo svoje zákony odvodzoval pomocou ťažkopádnej algebraickej symboliky a fragmentárnej idey súradnicovej sústavy, tam Descartes mohol predložiť omnoho elegantnejšie odvodenie. Je dôležité porozumieť tomu, prečo Descartes nevyužíva svoju matematickú bravúru na rozvoj (galileovskej) matematickej fyziky. Príčina je v tom, že Descartovým cieľom nebolo rozvíjať *kinematiku* pohybu, ale pokúsiť sa o opis *interakcie*, čo je jav, ktorý Galileo vôbec nechápal. Aj keď sa na prvý pohľad zdá byť Galileo bližšie k Newtonovi, lebo na opis fyzikálnych javov používa matematický jazyk, kým Descartes svoju fyziku buduje verbálne, tento dojem je klamlivý a opak je pravdou. Galileo matematickým jazykom rozvíja stále len *geometrickú teóriu pohybu*. Naproti tomu Descartes opisuje pôsobenie, a teda aj napriek verbálnemu spôsobu opisu rozpracúva *dynamickú koncepciu pohybu*.

Ako sme ukázali v knihe *Zrod vedy ako lingvistická udalosť*,²⁷ vylúčenie Descarta z dejín fyziky je omyl, lebo jeho fyzika bola mostom spájajúcim Galileovu fyziku s Newtonovou. Podľa nás v pythagorejskej matematike možno vidieť podobný most spájajúci Thalétovu geometriu s Euklidovou. Väčšinu epistemických črt, kvôli ktorým Burkert diskvalifikoval pythagorejskú aritmetiku, možno nájsť aj u Descarta – a tam ukázať ich zmysel. Hlavnou inováciou karteziánskej fyziky bolo zabudovanie interakcie do opisu prírody, teda *obohatenie fyziky o skladobnú a deduktívnu syntézu*. Okrem inovácií možno u Descarta nájsť aj rad nedostatkov.²⁸

Des-ino-1 Povýšenie rovnomerného priamočiareho pohybu na stav: Pre Galilea je zotrvačný pohyb zvláštnym druhom pohybu, ktorý nastáva na dokonale hladkej vodorovnej podložke a existuje tak vedľa iných druhov pohybu, ako sú voľný pád alebo šikmý vrh, ktoré nastávajú za iných podmienok. Zásadný význam zotrvačného pohybu pochopil až Descartes, keď ho povýšil na *stav*. Podľa Descarta *existuje jediný druh pohybu*: rovnomerný priamočiary pohyb – všetko ostatné je výsledok pôsobenia.

Des-ino-2 Povýšenie geometrickej formy na materiálnu substanciu: Descartova fyzika nie je matematická v povrchnom zmysle, ako je matematická Galileova fyzika. Pre Descarta matematika nie je iba *jazykom, ktorým opisujeme svet*. Matematické objekty – geometrické telesá obdarené pohy-

²⁷ Kvasz, L., *Zrod vedy ako lingvistická udalosť*, c.d.

²⁸ Epistemické inovácie Descartovej fyziky budeme označovať skratkou **Des-ino** a budeme číslovať od 1 po 6, kým jej epistemické nedostatky budeme označovať ako **Des-ned** a budeme ich číslovať od 1 po 4. Dostaneme tak zoznam desiatich charakteristík kognitívneho štýlu karteziánskej fyziky, resp. jej jazykového rámca.

bom – sú *ontologickým základom sveta*. Descartes povýšil geometrickú formu na substanciu. Galileovi sa príroda rozpadá na izolované javy, lebo chýba substrát, ktorý by umožnil javy zjednotiť. Postulovanie geometrickej substancie ako substrátu všetkých javov prináša ontologické zjednotenie javov a vytvára predpoklady jednotného opisu prírody. Descartes tak od Galileovej *matematizácie javov* prešiel k *matematizácii ontológie*.

Des-ino-3 Zákon zachovania množstva pohybu ako prvý univerzálny zákon: Descartes vyslovil zákon, podľa ktorého je množstvo pohybu vo vesmíre nemenné. V *Princípoch filozofie* dáva náznak jeho kvantitatívnej formulácie: „... Boh, ktorý na počiatku stvoril hmotu zároveň s pohybom a pokojom a teraz svojím zvyčajným prispievaním zachováva v nej toľko pohybu a pokoja, koľko do nej na začiatku vložil. ... Preto keď sa jedna časť hmoty pohybuje dvakrát rýchlejšie ako druhá a táto druhá je dvakrát väčšia než prvá, musíme predpokladať, že v menšej časti je práve toľko pohybu ako vo väčšej.“²⁹ Tento zákon je prvým príkladom univerzálneho prírodného zákona. Neopisuje konkrétnu triedu javov, ale opisuje to, čo všetky javy spája.

Des-ino-4 Pojatie pôsobenia ako odovzdávania určitého množstva pohybu: Descartes chápal zrážku ako stret, pri ktorom sa každé teleso snaží udržať svoj stav tak dlho, ako je to možné – pohybujúce sa teleso sa usiluje udržať si priamočiary pohyb; nehybné teleso sa usiluje udržať si stav pokoja. Nalietavajúce teleso môže pohnúť nehybným telesom len vtedy, keď je od neho väčšie. Vtedy nalietavajúce teleso odovzdá časť svojho množstva pohybu nehybnému telesu. Ak sa telesu B letiacemu rýchlosťou V_B podarí pohnúť nehybné teleso C , budú sa po zrážke obe pohybovať spolu rýchlosťou $\frac{B \times V_B}{B + C}$, ktorá plynie zo zákona zachovania množstva pohybu. Množstvo pohybu telesa B pred zrážkou bolo $B \times V_B$. Časť $\frac{C \times B \times V_B}{B + C}$ odovzdá teleso B telesu C a zvyšok $\frac{B^2 \times V_B}{B + C}$ si ponechá.

Des-ino-5 Postulovanie víru jemnej látky ako nositeľa pôsobenia: Keď Descartes objavil, že pohyb po kružnici je výsledkom pôsobenia, musel nájsť pre kruhový pohyb planét príčinu jeho zakrivenia. Keďže pôsobenie chápal ako zrážku, ako kontaktné pôsobenie, pri ktorom dochádza k odovzdávaniu určitého množstva pohybu, vysvetlením kruhového tvaru dráhy planéty musia byť zrážky planéty a nejakých (neviditeľných) telies. Preto Descartes postuloval vír jemnej látky, ktorý bráni planétam v priamočiarnom pohybe. Podľa Descarta existuje takýto vír nielen okolo Slnka, ale aj okolo Zeme – a ten vnímame ako tiaž. Descartov výklad tiaže je typickým príkladom karteziánskej schémy vysvetlenia. Jav, ktorý pozorujeme (tiaž), sa redukuje na pohyb

29 Descartes, R., *Princípy filozofie*. Prel. J. Špaňár. Bratislava, Pravda 1987, s. 100. Teda podľa Descarta je množstvo pohybu rovné súčinu veľkosti telesa a jeho rýchlosti.

substancie (jemnej látky). Keďže niektoré planéty majú mesiace, ktoré okolo nich obiehajú, znamená to, že v okolí týchto planét sú podobné víry. Karteziánska fyzika tak predpovedá výskyt tiaže aj na ostatných planétach. Vesmírna sústava vírov spája všetky javy do jednotného kauzálného previazaného celku. Slnčná sústava nie je sústavou izolovaných telies, samostatne krúžiacich okolo Slnka, ako je tomu u Galilea. Práve naopak, všetky telesá slnečnej sústavy sú spojené do jedného *dynamického systému*.

Des-ino-6 Zabudovanie interakcie do jazyka fyziky: Galileo opisoval pohyby izolovaných telies. Keď skúmal voľný pád, kyvadlo, alebo planéty, vždy skúmaný objekt izoloval od jeho okolia. Descartes si uvedomil, že pôsobenie nie je niečo rušivé, čo treba z opisu pohybu vylúčiť, ale naopak, pôsobenie určuje (kruhový či parabolický) charakter pohybu. Preto treba do opisu pohybu zabudovať pôsobenie. Descartes tak Galileove *kinematické* pojatie pohybu ako prechádzanie po vopred danej trajektórii nahradil pojatím *dynamickým*, opisujúcim zmenu pohybového stavu telies.

Des-ned-1 Stotožnenie materiálnej substancie a priestoru; nemožnosť definovať priamočiary pohyb: Descartes bol presvedčený o správnosti Koperníkovej teórie, ale zdráhal sa v tejto otázke zaujať stanovisko. Problému sa vyhol definíciou pohybu: „[Pohyb] je premiestňovaním jednej časti hmoty alebo jedného telesa zo susedstva tých telies, ktoré sa ho bezprostredne dotýkajú a ktoré chápeme, akoby boli v pokoji, do susedstva iných telies.“³⁰ O pohybe teda možno hovoriť len vo vzťahu k telesám, ktoré dané teleso obklopujú. Descartes píše: „Z toho vyplýva, že ani Zem, ani iné planéty nemajú vlastný pohyb, pretože sa nepremiestňujú zo susedstva nebeských častí, ktoré sa ich bezprostredne dotýkajú.“³¹ Descartes tak použil definíciu pohybu na verbálne odmietnutie kopernikanizmu. Zem je nehybná, lebo je nehybná voči látke, ktorá ju obklopuje. V rukopise *De gravitatione* Newton podrobil Descartovu definíciu pohybu kritike.³² Jeho hlavným argumentom je, že ak pohyb definujeme ako premiestnenie telesa voči telesám tvoriacim jeho okolie, tak nie je možné zaviesť pojem priamočiareho pohybu. Ak sa telesá, ktoré dané teleso obklopujú, pohybujú rôznymi smermi, jedny zrýchlene, iné spomalene, nie je jasné, voči čomu je pohyb telesa priamočiary.

Des-ned-2 Neprepojenosť fenomenálnej a ontologickej úrovne opisu: Vysvetlenie tiaže pomocou víru jemnej látky predstavuje paradigmatický príklad karteziánskej metódy vysvetlenia prostredníctvom redukcie javu na jeho ontologický základ. Uvedená metóda má však zásadný nedostatok,

30 Tamže, s. 93.

31 Tamže, s. 128.

32 Newton, I., *De gravitatione*. In: *Unpublished Scientific Papers of Isaac Newton*. Ed. A. R. Hall – M. B. Hall. Cambridge, Cambridge University Press 1962, s. 89–121.

ktorým je príliš voľné prepojenie javu a ontologického modelu, ktorý slúži na jeho vysvetlenie. Tak v prípade tiaže síce vieme, že tiaž vzniká ako vytlačanie telies z víru jemnej látky, ale vlastnosti tiaže – ako veľkosť, homogénnosť a smer – nie sú nijako prepojené s vlastnosťami víru jemnej látky, teda s jeho rýchlosťou a orientáciou v priestore.

Des-ned-3 Neschopnosť zahrnúť trenie do opisu pohybu: Aby vysvetlil tiaž a kruhový tvar planetárnych orbít, Descartes celý vesmír vyplnil jemnou látkou. Z hľadiska rozvoja fyziky to bol významný krok vpred, pretože do vesmíru vniesol kauzálnu prepojenosť všetkých javov. Vesmír už nebol súborom izolovaných neinteragujúcich telies, ale každé teleso mohlo pôsobiť na ľubovoľné iné teleso prostredníctvom jemnej látky. Napriek týmto prednostiam má vír jemnej látky jeden zásadný nedostatok. Keby skutočne obeh Zeme okolo Slnka bol spôsobovaný jemnou látkou, táto by musela so Zemou intenzívne interagovať. Za pól roka by jemná látka musela Zemi udeliť hybnosť rovnú dvojnásobku súčinu hmotnosti Zeme a jej rýchlosti obehu okolo Slnka (čo je 2 krát $5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$ krát $2,98 \times 10^4 \text{ m.s}^{-1}$, čo dáva $3,56 \times 10^{29} \text{ kg.m.s}^{-1}$). Keby jemná látka so Zemou tak intenzívne interagovala, vznikalo by *obrovské trenie*, ktoré by pohyb Zeme behom krátkeho času zastavilo. Vynechanie trenia z obrazu pohybu nie je Descartovým nedopatrením. Trenie sa nedá do karteziánskeho systému zabudovať, lebo pri trení sa určité množstvo mechanického pohybu mení na teplo, a tak sa *porušuje zákon zachovania množstva pohybu*.

Des-ned-4 Neschopnosť opísať ohraničený systém – skladobná otvorenosť karteziánskej fyziky: Descartes vyslovil zákon zachovania množstva pohybu pre vesmír ako celok, vďaka čomu je tento princíp prakticky nepoužiteľný. V karteziánskej fyzike nemožno vyčleniť ohraničený systém telies, pretože v dôsledku ponorenia všetkých telies do prostredia jemnej látky dochádza neustále k interakcii s týmto prostredím. Preto aj keď Descartes našiel spôsob opisu interakcie, tento sa nedá aplikovať na žiadnu konkrétnu situáciu. Do každého systému jemná látka prináša alebo z neho odnáša určité množstvo pohybu. Descartova fyzika tak pozná jediný fyzikálny systém – vesmír ako celok.

2.2 Pythagorejská matematika v zrkadle karteziánskej fyziky

Tak ako sme prínosy a nedostatky galileovskej fyziky použili pri výklade Thalétovej matematiky, necháme sa viesť prínosmi a nedostatkami karteziánskej fyziky pri výklade pythagorejskej matematiky.³³ Tieto prínosy a nedo-

³³ Dôvod použitia karteziánskej fyziky pri výklade pythagorejskej matematiky je rovnaký ako bol dôvod použitia galileovskej fyziky pri výklade Thaléta. Ide o to, že kognitívny štýl thalétovskej či pythagorejskej matematiky ostáva bežnej analýze skrytý. Až potom, ako sme kognitívny štýl

statky totiž vnímame ako epistemologické črty jazykového rámca, ktorého vznik je druhou etapou procesu idealizácie. Paralelu karteziánskej fyziky a pythagorejskej matematiky pochopíme, keď si uvedomíme, že interakcia je druhom *syntézy* (v kantovskom zmysle).³⁴ Úlohou interakcie vo fyzike je spojiť súbor telies do jednotného systému. Keď interakciu pochopíme ako princíp syntézy, nájdenie jej analógie v matematike nebude ťažké: postačí nájsť princíp syntézy matematiky. To umožní inovácie a nedostatky karteziánskej fyziky dať do súvisu s paralelnými inováciami a nedostatkami pythagorejskej matematiky.³⁵

Pyt-ino-1 Položenie javu podobnosti za základ geometrie: Zvláštnym nedostatkom Thalétovej geometrie bolo, že jej vety boli o *zhodnosti*. Vidno to na príklade merania výšky pyramídy, kedy nie je nutné čakať, až kým sú tieň telies rovnako dlhé ako ich výška. Stačí určiť, koľkokrát je tieň dlhší než teleso, a v rovnakom pomere bude aj výška pyramídy k dĺžke jej tieňa. Takto by postupoval pythagorejec. Thalés však geometriu zakladal na zhodnosti, a preto musel čakať, až budú tieň telies rovnako dlhé, ako je ich výška. Thalétovská geometria dáva do súvisu určitý jav s *rovnakým javom prítomným na danom alebo blízkom objekte*. Až pythagorejci, ktorí v každom jave videli číslo, mohli za základ geometrie vziať *podobnosť*. Dva útvary sú podobné, keď *čísla prislúchajúce ich korešpondujúcim prvkom sú v rovnakom pomere*. Radikálnosť tohto posunu môžeme dnes iba ťažko doceniť, lebo pre nás je podobnosť *geometrickým* javom. Ale nesmieme zabúdať, že to bolo pythagorejské prepojenie geometrie a čísiel, ktoré umožnilo vypracovať pojem podobnosti. Musíme si odmyslieť euklidovské priradovanie pomerov úsečkám bez sprostredkujúcej aritmetickej ontológie, aby sme pochopili význam pythagorejskej aritmetizácie geometrie.

Pyt-ino-2 Povýšenie čísel na substanciu sveta: Asi najnápadnejšou analógiou medzi pythagorejskou matematikou a karteziánskou fyzikou je ich ontologické ukotvenie. Pythagorejci pripisovali číslam ontologický status a považovali ich za súcna, podobne ako Descartes pripísal ontologický status

galileovskej fyziky *konceptuálne* vyložili ako *absenciu skladobnej a deduktívnej syntézy*, ukázalo sa, že rovnako môžeme charakterizovať aj Thaléta. Preto chceme zdôrazniť, že použitím karteziánskej fyziky pri výklade pythagorejskej matematiky nechceme tvrdiť nejakú historickú súvislosť. Je to heuristický krok, umožňujúci získať pojmy a perspektívu, z hľadiska ktorej možno nájsť *kognitívnu jednotu* pythagorejskej matematiky. Keď ju nájdeme, tak podobne ako v prípade Thaléta táto jednotu už musí obstáť sama, teda musí byť tak presvedčivá, aby čitateľ o nej nemal pochybnosti.

34 Pozri Körner, S., Kant. Harmondsworth, Penguin Books 1974.

35 Nejde o historickú analógiu medzi karteziánskou fyzikou a pythagorejskou matematikou, lebo pre takúto analógiu neexistuje žiaden dôvod. Čo hľadáme, je izomorfizmus epistemologickej štruktúry jazykového rámca týchto teórií. Analýza inovácií a nedostatkov je iba heuristika umožňujúca tento izomorfizmus odhaliť.

geometrickým telesám vo forme rozpriestranenej veci. Keď tieto teórie stoja osamote – pythagorejská číselná ontológia a karteziánska geometrická ontológia –, tak sa len ťažko ubránime pocitu bizarnosti. Pythagoreizmus pôsobí v matematike ako určitá historická anomália, podobne ako karteziанизmus vo fyzike. Keď ich však postavíme vedľa seba, vidíme, že nie sú „metafyzickým omylom“, ale dôležitou etapou v procese konštitúcie jazyka.

Obe teórie, pythagorejská matematika a karteziánska fyzika, sú analogické aj v tom ohľade, že to, čo zvyšujú na ontologický substrát, sú objekty *predošlej idealizácie obohatené o určitý aspekt idealizácie novej*. Pythagoras berie čísla, čo sú ideality predošlej idealizácie, t.j. idealizácie počtu, a obohacuje ich o polohu a tvar v teórii figurálnych čísel. Podobne Descartes berie rozpriestranenú substanciu, čo je idealita predošlej idealizácie, t.j. matematiky, a obohacuje ju o pohyb a zotrvačnosť, čo sú aspekty geometrie cudzie.³⁶ Čísla majú u pythagorejcov podobnú úlohu ako rozpriestranená substancia u Descarta – umožňujú zjednotiť rôzne javy do jednotného teoretického rámca.

Pyt-ino-3 Pythagorov objav všeobecnosti: Podobne ako sa prechod od Galilea k Descartovi vyznačoval objavom prvého univerzálneho zákona fyziky – *zákona zachovania množstva pohybu*, nárast všeobecnosti charakterizuje aj prechod od Thaléta k Pythagorovi. Vety Thalétovej geometrie sú vety tvrdiace zhodnosť, a teda sa vlastne týkajú rôznych výskytov jediného geometrického javu (najčastejšie uhla určitej veľkosti alebo úsečky určitej dĺžky). Preto aj keď sú formulované ako všeobecné tvrdenia (napríklad, že „v každom rovnoramennom trojuholníku oproti zhodným stranám ležia zhodné uhly“), fakt, ktorý tvrdia, je *špeciálny* (identita dvoch uhlov) a týka sa *úzkej triedy* objektov (rovnoramenných trojuholníkov).

Naproti tomu pythagorejské pravidlo tvrdiaci, že „v každom pomere je súčin vonkajších členov rovný súčinu vnútorných“, má iný typ všeobecnosti. Možno ho použiť na ľubovoľné útvary. A netvrdí identitu aspektov útvaru (uhlov či dĺžok), ale napríklad o útvaru vystupujúcom v dôkaze Pythagorovej vety tvrdí, že od vzťahu $a : c_1 = c : a$, ktorý vyplýva z podobnosti trojuholníkov, môžeme prejsť ku vzťahu $a^2 = c \cdot c_1$. Aj v tom pythagorejské pravidlo pripomína karteziánsky zákon zachovania množstva pohybu. Zákon zachovania množstva pohybu umožňuje pri opise zrážok určiť rýchlosť telesa po zrážke, teda prejsť od jedného pohybového stavu k nasledujúcemu. Podobne pythagorejské pravidlo umožňuje prejsť od vzťahu $a : c_1 = c : a$ ku vzťahu $a^2 = c \cdot c_1$.

36 Sú to hybridy v tom zmysle, v akom tento pojem zaviedla Emily Grosholzová v *Representation and Productive Ambiguity in Mathematics and the Sciences* (Oxford, Oxford University Press 2007). Hybridy sú epistemicke plodné, ale nedokážu sa udržať dlhšiu dobu. Komponenty náležiacie rôznym disciplinám, ktoré tvoria tieto hybridy (počet aritmetike, tvar a rozpriestranenosť geometrie, pohyb mechanike), sa nakoniec opäť rozpoja.

Ide teda o pravidlo zväzujúce dva aritmetické vzťahy, podobne ako Descartov zákon zväzuje dva dynamické stavy.

Pyt-ino-4 Pojatie dôkazu ako postupnosti aritmetických transformácií: Keď Pythagoras spojil geometrické útvary s číslami, útvary zasadil do siete aritmetických vzťahov a kalkulatívnych súvislostí. Teda podobne ako karteziánska fyzika *zasadzuje izolované telesá* galileovského univerza *do siete vzájomných vzťahov* pomocou interakcie, ktorú opisuje pomocou zákona zachovania množstva pohybu, pythagorejská matematika *zasadzuje izolované útvary* thalétovskej geometrie pomocou čísel, ktoré im priraduje, *do siete vzájomných aritmetických vzťahov* deliteľnosti, usporiadania, či pomerov, ktoré sú podriadené zákonom aritmetiky.

Pyt-ino-5 Jednotka ako nositeľ kalkulatívno-argumentačnej syntézy: Podobne ako Descartes postuloval jemnú látku ako substanciu sprostredkujúcu prenos pôsobenia, aj pythagorejská matematika si vypomáha podobným trikom. Aby mohli rôzne javy dať do vzájomného súvisu, postulovali pythagorejci spoločnú jednotku, ktorá umožňuje preniesť vzťahy z jedného javu na druhý. Tak ako jemná látka spája časti vesmíru do spoločnej kauzálnej schémy, spoločná jednotka spája matematické objekty do spoločnej *kalkulatívno-argumentačnej schémy*.

Pyt-ino-6 Zabudovanie skladobnej syntézy do jazyka matematiky: Keď zoberieme *Pythagorovu vetu* ako jeden zo základných poznatkov pythagorejskej matematiky, okamžite si všimneme rozdiel oproti vetám Thalétovskej geometrie. Pythagorova veta je *o zloženej objektke*. Hovorí o štvorcoch nad odvesnami a preponou pravouhlého trojuholníka. Vystupuje v nej trojuholník a tri štvorce. Dôkaz uvedený v časti 1.2 je tvorený reťazcom *evidencií a kalkulatívnych krokov*. V dôkaze sme rozlíšili štyri kroky. Takže oproti thalétovskej geometrii, ktorej vety sa týkali izolovaných objektov a dôkazy mali povahu bezprostredného nahliadnutia, pythagorejská matematika prináša *syntézu*, a to *skladobnú syntézu* prvkov geometrického útvaru a *deduktívnu syntézu* krokov dôkazu.³⁷ Základným prvkom, ktorý umožňuje tieto syntézy, sú čísla. Jednak čísla vďaka pomerom umožňujú dať prvky zloženého útvaru do vzájomných vzťahov. Okrem toho čísla vďaka princípom (ako je princíp rovnosti súčiny vonkajších a vnútorných prvkov pomeru) umožňujú prechádzať od jedného tvrdenia k ďalšiemu a tým tvoriť dôkaz.

37 Bezprostrednosť nahliadnutia u Thaléta *neznamená*, že nahliadnutie nastáva okamžite. Nahliadnutie nastáva často až ako dôsledok určitej (fyzickej alebo mentálnej) manipulácie s objektom. Ale napriek tomu ide o bezprostredné nahliadnutie v tom zmysle, že príslušná manipulácia ho iba navodzuje, ale samotné nahliadnutie prebieha v jedinom akte. Tým sa thalétovské ukázanie líši od pythagorejských dôkazov, ktoré prechod od predpokladov k výsledku rozkladajú do krokov. Už to nie je jeden akt, ale postupnosť kalkulatívnych krokov.

Pyt-neg-1 Stotožnenie materiálnej substancie a čísla – nemožnosť určiť mnohosť: Podľa Aristotelovho svedectva považovali pythagorejci čísla za niečo materiálne.³⁸ Sama o sebe je táto črta nepochopiteľná, dnes si iba ťažko vieme predstaviť čísla ako telesné predmety. Keď však tento aspekt pythagorejskej teórie postavíme vedľa analogického karteziánskeho stotožnenia geometrickej substancie s látkou, zdá sa, že ide o aspekt rovnakého štádia procesu idealizácie. Pri výklade karteziánskej fyziky sme uviedli Newtonovu kritiku stotožnenia látky a priestoru, ktoré znemožňuje definovať rovnomerný priamočiary pohyb. Keď chceme nájsť analogický negatívny dôsledok pythagorejského stotožnenia čísla a súcna, kandidátom je jedna zo *Zenónových apórií*. Keď čísla prehlásime za materiálne súcna, tak Zenónova argumentácia proti mnohosti súcien ukazuje, že nie je možné určiť jednotku, a teda ani mnohosť.

Pyt-neg-2 Neprepojenosť fenomenálnej a ontologickej úrovne opisu: Jav nesúmerateľnosti poukazuje na zásadný nedostatok pythagorejskej matematiky. Pythagorejskou inováciou, ktorá mala rozhodujúci vplyv na ďalší rozvoj matematiky, bolo vytvorenie ontologickej bázy matematických javov. Tým, že každý jav získal ontologické ukotvenie v číslach a ich pomeroch, matematika získala skladobnú a deduktívnu syntézu. Z toho, že dĺžky strán trojuholníka *sú čísla*, jav podobnosti je určený *číselnými pomermi* a číselné pomery možno *aritmeticky upravovať*, sme odvodili platnosť Pythagorovej vety. Toto odvodenie má však jeden nedostatok: *nevieme určiť čísla*, ktoré prislúchajú stranám trojuholníka, nevieme, čo je jednotka a koľko ich je obsiahnutých v jednotlivých stranách. Objav nesúmerateľnosti ukázal, že v určitých situáciách žiadne čísla neexistujú. Ale ani v prípade, keď sú strany súmerateľné, nevieme ako ich čísla určiť. Táto črta pythagorejskej matematiky pripomína neprepojenosť fenomenálnej a ontickej úrovne karteziánskej fyziky. Tak ako pythagorejské postulovanie čísel, aj karteziánske postulovanie rozpriestranenej substancie bolo významným krokom vpred – prinieslo do jazyka skladobnú a deduktívnu syntézu. Ale v oboch prípadoch *ontická úroveň ostala neprepojená s úrovňou javovou*.

Pyt-neg-3 Neschopnosť zahrnúť nesúmerateľnosť do matematiky: Pozoruhodná paralela existuje medzi pythagoreizmom a karteziánstvom aj z hľadiska ich ďalšieho osudu. Podobne ako objav nesúmerateľnosti rozvrátil pythagorejskú matematiku, objav trenia rozvrátil karteziánsku fyziku. Tak ako Euklidove *Základy* predstavujú do veľkej miery korekciu pythagorejskej matematiky, prinášajú Newtonove *Princípie* korekciu Descartových *Princípov filozofie*. Newton na miesto zákona zachovania množstva pohybu kladie

38 Pozri Aristotelés, *Metafyzika*. Přel. A. Kříž. Praha, Rezek 2003, 987b28; 1083b17; 1090a22.

zákon pôsobenia síl (teda nahrádza *ontologický princíp nemennosti* množstva pohybu *dynamickým zákonom vzniku pohybu* za pôsobenia síl).

Ako sme uviedli, negatívne aspekty nepovažujeme za chyby Pythagorovho resp. Descartovho myslenia, ale za epistemickú črtu jazykového rámca príslušných teórií. Ide o to, že pythagorejci používali pre *geometrické javy aritmetickú ontológiu*, podobne ako použil Descartes pre *dynamické javy geometrickú ontológiu*. Takže okrem vytvorenia ontologického základu pre matematiku resp. fyziku Pythagora a Descarta spája aj skutočnosť, že obaja použili pri tvorbe tohto ontologického základu ideálne objekty predchádzajúcej idealizácie – Pythagoras čísla a Descartes geometrické objekty. To, že tieto ideality nemôžu splniť úlohu, ktorú im určili, t.j. že geometrické javy nemožno opísať v jazyku aritmetiky (kvôli nesúmerateľnosti) a dynamické javy v jazyku geometrie (kvôli treniu), nie je dôležité. Keď už je ontológia vytvorená, je možné jej nedostatky odstrániť.

Pyt-neg-4 Neschopnosť vytvoriť uzavretú teóriu – deduktívna otvorenosť matematiky: Okrem neschopnosti zahrnúť určité javy do ontologického rámca teórie má pythagoreizmus a karteziánstvo paralelu aj v zásadnej *otvorenosti teórií*. Descartov zákon zachovania množstva pohybu platí pre vesmír ako celok. Karteziánska fyzika nie je schopná opísať *kauzálne uzavretý ohraničený fyzikálny systém*. Vytvorenie opisu ohraničeného systému bolo jedným z hlavných výdobytkov newtonovskej fyziky. Kauzálnej otvorenosti karteziánskej fyziky zodpovedá *deduktívna otvorenosť* pythagorejskej matematiky. Pythagorejský dôkaz spočíva v odvodení určitého tvrdenia zo základnejších tvrdení. Avšak to, aké predpoklady budeme pri odvodzovaní potrebovať, je nejasné. Podobne ako nevieme, čo všetko môže ovplyvniť správanie sa systému telies karteziánskej fyziky, nevieme ani to, aké princípy určujú platnosť vety pythagorejskej matematiky.

3. Burkertove argumenty proti Pythagorovi ako matematikovi

Walter Burkert nadväzuje v analýze pythagoreizmu na tradíciu, ktorú inicioval Eduard Zeller. Ten si uvedomil, že väčšina zdrojov, o ktoré sa opiera obraz Pythagora ako zakladateľa gréckej matematiky, pochádza od neopythagorejcov a neoplatonikov 2.–5. storočia nášho letopočtu. Po kritickej analýze doxografickej evidencie zistil, že tento obraz je v konflikte s obrazom pythagoreizmu u Aristotela a jeho žiakov. Zeller preto obvinil neopythagorejcov zo skreslenia obrazu Pythagora a na miesto ich obrazu Pythagora položil obraz Aristotelov. Burkert začína tam, kde Zeller skončil, lebo výsledky novších filologických analýz ukazujú, že keď Aristoteles hovorí o pythagorejskej matematike, hovorí o Filolaovi z Krotónu a Archytovi z Tarentu. To znamená, že u Aristotela nemáme obraz najrannejšej vrstvy pythagoreizmu. Burkert sa

snaží ukázať, že skreslený obraz Pythagora ako matematika má svoj pôvod už u Platóna a presadil sa vďaka jeho žiakom v Starej akadémii – nie je to teda skreslenie pochádzajúce od neopythagorejcov (ako sa domnieval Zeller), ale vzniklo zhruba o sedemsto rokov skôr. Podobne ako Zeller ponúkol korekciu neopythagorejského skreslenia, ponúka Burkert korekciu skreslenia platónskeho. Pri nej sa však už nemôže opierať o Aristotelov výklad pythagorejskej matematiky, ale musí vychádzať z predplatónskej evidencie.³⁹

Obraz, ku ktorému Burkert dospieva, je nasledovný: Pythagoras nebol matematik, ale tradičný mudrc, ktorý do svojho učenia zakomponoval rad prvkov orientálneho pôvodu, predovšetkým učenie o metempsychóze. Tieto prvky oslovili Platóna, ktorý sa s viacerými aspektmi pythagorejského učenia identifikoval a rozvinul ich v *Timaeovi* v duchu vlastného učenia. Jeho žiaci Xenokrates, Speusippos a Heraklides začali tieto nové, platónske dodatky spätne pripisovať Pythagorovi. Keďže sa z raného obdobia pythagoreizmu nedochovali žiadne zdroje, začali byť texty Platónových žiakov recipované doxografickou tradíciou ako doklady o autentickom pythagoreizme. Aristoteles napísal niekoľko prác, v ktorých načrtol obraz pythagorejcov odporujúci výkladu Platónových žiakov. Pod tlakom platónskej tradície bol však Aristotelov výklad zmenený, pretože protirečil učeniu Starej Akadémie, a bol pripísaný Filolaovi. Keď sa neskôr Stredná Akadémia stala skeptickou a v Platónovi začala vidieť pokračovateľa sokratovského prúdu, celú „dogmatickú“ stránku Platónovho učenia vnímala ako cudzí element, ktorý pripísala Pythagorovmu vplyvu. Tým pythagoreizmus definitívne splynul so svojím platónskym výkladom. Neopythagoreizmus, od ktorého Zeller odvodzoval pôvod skresleného obrazu Pythagora, už len tento platonizujúci výklad potvrdil.⁴⁰

Tento scenár nechceme spochybňovať. Ide nám len o matematiku raných pythagorejcov. Burkert považuje všetku matematiku pripisovanú Pythagorovi za neautentickú a učenie raných pythagorejcov za primitívnu numerológiu, ktorá nemá s matematikou nič spoločné. Je to tento bod, o ktorého správnosti nie sme presvedčení. Burkertove argumenty proti autentickosti tradície vidiacej v Pythagorovi zakladateľa matematiky možno rozdeliť do štyroch skupín. Jednak sú to argumenty založené na rekonštrukcii najstarších správ o živote Pythagora, ktoré ho zobrazujú ako *šamana*, čo podľa

39 Pozri Lloyd, G., Pythagoras. In: Huffman, C. A. (ed.), *A History of Pythagoreanism*, c.d., s. 26.

40 Na zaujímavý aspekt Burkertových analýz upozornil Leonid Zhmud. Burkert síce odmieta neopythagorejskú a platónsku deformáciu obrazu Pythagora, ale kategórie, pomocou ktorých uchopuje Pythagora, keď mu upiera status *matematika* a robí z neho autora *akuzmát*, pochádzajú od neopythagorejca Nikomacha z Gerasy. Neexistuje starší doklad protikladu matematikov a akuzmatikov. Preto keď Burkert ukazuje, že Pythagoras nebol matematik ale autor akuzmát, pozerá sa na Pythagora skrze túto novopythagorejskú optiku. (Zhmud, L., Sixth-, fifth- and fourth-century Pythagoreans. In: Huffman, C. A. (ed.), *A History of Pythagoreanism*, c.d., s. 93.)

Burkerta protirečí obrazu Pythagora ako matematika. Druhú skupinu tvoria argumenty opierajúce sa o najstaršie doklady o pythagorejskom chápaní čísel, ktoré je bližšie *numerológii* (alebo číselnej mystike) než aritmetike ako matematickej disciplíne. Tretia skupina argumentov sa opiera o kontrast geometrie, ktorá tvorí jadro gréckej matematiky, a *teórie figurálnych čísel*, ktorá je vzdialená racionálnemu trendu gréckej geometrie. A posledná skupina argumentov kladie do kontrastu deduktívny štýl gréckej matematiky a *induktívny štýl* pythagorejskej teórie figurálnych čísel.

Burkert *vystihol kognitívny štýl pythagorejskej matematiky*. Ako filológ má však podľa nás (pri všetkej úcte k jeho filologickému výkonu) zúžený obraz matematiky. S matematikou sa stretol v jej školskej, deduktívnej forme. Túto (euklidovskú) formu stotožnil s celkom matematiky a na základe rozporu obrazu, ktorý získal analýzou textovej evidencie o pythagoreizme, s predstavou matematiky ako završenej vedy potom Pythagora ako matematika diskvalifikoval. Práce Georga Pólya⁴¹ a Imre Lakatosa⁴² však spochybňujú identifikáciu matematiky s jej euklidovskou formou. Aj keď euklidovská forma je cieľ (alebo jeden z cieľov), k tomuto cieľu vedú viaceré cesty, a jedna z nich (o ktorej píše Pólya a Lakatos) je blízka obrazu, ktorý o pythagoreizme predkladá Burkert. Podľa nás sa za Burkertovu analýzu skrýva príliš úzke pojmávanie matematiky. Naším cieľom nie je dokázať, že Pythagoras bol matematik, ale spochybniť argumenty, ktorými Burkert túto alternatívu vyvracia. Prehľad inovácií a nedostatkov umožňuje pochopiť *kognitívny zmysel* pythagorejskej matematiky a jej *miesto vo vývine matematiky*. Proti Burkertovým argumentom tak kladieme výklad pythagorejskej matematiky ako zmysluplnej teórie majúcej pevné miesto vo vývoji matematiky.

3.1 Pythagoras ako šaman

Burkert si Pythagora predstavuje ako mudrca myticko-šamanského druhu, vyučujúceho tajnú náuku o svete a duši.⁴³ Asi o generáciu neskôr sa v Grécku zmenila sociálna a intelektuálna klíma, grécka kultúra sa racionalizovala a tomuto novému duchu bol dodatočne prispôsobený aj obraz Pythagora. Z myticko-šamanského mudrca sa stal zakladateľ vedy. Miesto tranzu ako cesty k pravde zaujal matematický dôkaz. S možnosťou tohto posunu treba súhlasiť. S čím nesúhlasíme, je téza, že pôvodný Pythagoras mal učenie s nulovým matematickým obsahom. Zdá sa, že Burkert nedoceňuje možnosť, že

41 Pozri Pólya, G., *Mathematics and Plausible Reasoning*. Princeton, Princeton University Press 1954; a Pólya, G., *Mathematical Discovery*. New York, John Wiley 1962.

42 Lakatos, I., *Proofs and Refutations*. Cambridge, Cambridge University Press 1976.

43 V čase, kedy Burkert písal svoju knihu, bol výskum šamanizmu novou oblasťou. V súčasnosti je však pohľad na používanie takých pojmov, ako je šamanizmus, pri výklade gréckej kultúry skôr skeptický (pozri Lloyd, G., Pythagoras, c.d., s. 42).

racionálnemu trendu gréckej civilizácie sa prispôbil nielen obraz Pythagora, ale aj samotná matematika. To znamená, že Burkert nepočíta s možnosťou existencie inej formy matematiky než euklidovskej; t.j. formy, ktorá po krátkom čase prestala byť zrozumiteľnou a v priebehu transformačných procesov (ktoré Burkert presvedčivo vykresľuje) degenerovala na numerológiu, čo prispelo ku vzniku obrazu šamana bez vzťahu ku skutočnej matematike.

Touto inou formou matematiky, ktorá po krátkom čase stratila zrozumiteľnosť (a ktorej stopy Burkert vehementne vylučuje z matematiky), je matematika, v ktorej deduktívna a skladobná syntéza má aritmetickú formu, teda dôkaz je druhom výpočtu a skladobná zložitost' útvaru vzniká prikladaním jednotiek. Je to matematika, ktorá sa od Euklidovej líši možno ešte viac než Thalétova matematika (ktorá je predsa len geometrická). Tejto matematike by sme možno úplne prestali rozumieť, tak ako jej nerozumie Burkert, nebyť karteziánskej fyziky. Tá sa od newtonovskej fyziky líši rovnako radikálne, ako sa pythagorejská matematika líši od euklidovskej matematiky. Karteziánska fyzika upozorňuje na nelineárnosť vývinu vedeckého poznania. Zrod fyziky v 17. storočí, podobne ako vznik matematiky v starovekom Grécku, nie je procesom postupného približovania sa k racionalnému ideálu. Je to proces majúci viaceré fázy, z ktorých niektoré, keď sú vytrhnuté z kontextu, pôsobia ako iracionálny, „retrográdny“ pohyb, ktorý sa prieči celkovému trendu. Naším cieľom je tieto zdanlivo iracionálne epizódy zabudovať do celkového obrazu, lebo až tak sa proces idealizácie stáva zrozumiteľným.

Burkert píše: „Staršie spoľahlivejšie zdroje predkladajú Pythagorovu legendu a akuzmata. Odkrývajú obraz mudrca podobného šamanovi a obraz života žitého v súlade s jeho predpismi, v ktorom filozofia alebo veda, ako tieto chápali Gréci, nemuseli mať žiadne miesto. Neskôr akuzmatici nepovažovali matematikov za pythagorejcov.“⁴⁴ Burkert vidí v akuzmatách „pokračovanie spôsobu myslenia, ktorý už bol prekonaný Anaximandrom a Anaximenom. Títo sa snažili vysvetliť zemetrasenie na základe fyzikálnych princípov. ... Ale kým Anaximandros sa pýta ‚Čo je Slnce? ... Ako je veľké?‘ a odpovedá ‚Ohnivý kruh ... rovnakých rozmerov ako Zem‘, pythagorejci sa pýtajú ‚Čo sú ostrovy blažených?‘ a uspokojujú sa s odpoveďou ‚Slnko a Mesiac‘.“⁴⁵ Učenie pythagorejcov tak kladie do protikladu k racionalnému trendu gréckej vedy. Podľa Burkerta *akuzmata* sú rituálneho pôvodu (ako v gréckom náboženstve, tak aj v iných kultúrach sa mu podarilo nájsť mnoho paralel k akuzmatám) a pochádzajú od autentického Pythagora. Podobne v súvislosti s hudbou sfér Burkert tvrdí, že: „Ak bol Pythagoras niečo ako šaman, ktorý

44 Burkert, W., *Lore and Science in Ancient Pythagoreanism*, c.d., s. 278.

45 Tamže, s. 186.

v extáze mal kontakt so svetmi ,za‘, potom tradícia, podľa ktorej on osobne bol schopný počuť hudbu sfér, určite uchováva kus pravdy. Keď sa pozrieme za fasádu analýzy a vysvetlenia harmónie sfér, čo nájdeme, nie je ani empirická, ani matematická veda, ale eschatológia.⁴⁶

Nedostatkom tejto rekonštrukcie je, že náboženstvo chápe ako súbor iracionálnych povier a praktík. Je však možné, že akuzmata nemajú *pôvod v rovnakej vrstve* ako náboženské rituály, ale iba *slúžia analogickej zmene* vo vedomí ich používateľa. Ich podoba rituálnym zákazom a príkazom potom nie je obsahová zhoda, ale funkčná paralela. Je možné, že Pythagoras nebol náboženský vodca (*hierofant*, ako ho nazýva Burkert), ale pokúšal sa stabilizovať mentálny prerod, ktorý je spojený so vznikom matematiky. Je možné, že podobnosť akuzmat a rituálnych predpisov vyrastá z paralelnej funkcie, a nie z vývojovej príbuznosti. Burkert neidentifikuje funkciu náboženstva (stabilizovať nový druh mentálnych obsahov), a preto nemôže odhaliť funkčný charakter paralely medzi akuzmatami a rituálnymi predpismi. Na základe formálnej podobnosti potom postuluje ich vývojovú paralelu.

V tejto sfére je zásadnou otázkou vzťah medzi iracionálnymi presvedčeniami a racionálnym poznaním. Burkert uvádza tradíciu dejín filozofie, začínajúcu Johnom Burnetom, ktorá jednotu medzi vedou a náboženstvom (mágiou, mystikou) „našla v ideáli katarzie. Vedecká aktivita je z tohto hľadiska najvyššou formou očistenia a vedie ku spásu duše.“⁴⁷ K tejto tradícii patrili aj Francis Macdonald Cornford a John Earle Raven. Aj keď možno súhlasiť s Burkertom, ktorý spochybňuje *existenciu priamej cesty* vedúcej od mágie k vede, neznamená to, že je nutné vylúčiť iracionálne presvedčenia z rekonštrukcie vývinu vedy. Vývin poznania nesleduje priame cesty. To, čo nám pripadá ako Descartove iracionálne špekulácie alebo ako pythagorejská mystika a šamanizmus, mohlo mať miesto na ceste k racionálnemu poznaniu. Môže to byť etapa *kognitívneho prerodu*, bez ktorého nie je možné dospieť k racionálnemu poznaniu (vo fyzike rovnako ako v matematike).

V postavení iracionálneho, aritmetického a induktívneho ducha pythagoreizmu do protikladu k racionálnemu, geometrickému a deduktívnemu duchu gréckej matematiky má Burkert pravdu. Mýli sa však v tom, že vývin matematiky chápe lineárne a z toho, že sa určitá náuka ocitla mimo spojnice Thaléta a Euklida, usudzuje, že sa nachádza mimo trasy, po ktorej prebiehal vývin matematiky. Okrem toho matematika *je* mystická. Čo už je viac mys-

46 Tamže, s. 357.

47 Tamže, s. 2. Burkert odmieta Burnetov výklad jednoty vedy a náboženstva na báze katarzie, prijíma však názor Doddsa, ktorý v diskusií gréckeho šamanizmu hovorí o „puritanizme“, chápanom „ako intenzívne pociťovaná tensia medzi telesnými potrebami a potrebami ducha, ktorý sa potrebuje oslobodiť od tela“. Burkert, W., *Lore and Science in Ancient Pythagoreanism*, c.d., s. 191.

tické než transfinítaná aritmetika, štvorrozmerný priestor, fraktálna geometria alebo deterministický chaos? V porovnaní s tým tradičný šamanizmus bledne. V šamanskom tranze duša môže opustiť telo a letieť na Mesiace. Ale to dokáže aj moderná technika – a na rozdiel od šamana dokáže pri návrate priniesť aj trocha hornín z povrchu Mesiaca. Ale žiaden šaman netuší, že existujú objekty s dimenziou rovnou $\log_4 : \log_3$.

Burkert zvýraznil nábožensko-mystické korene pythagoreizmu, aby na základe predpokladu, že náboženstvo je iracionálne a matematika racionálna, Pythagora ako matematika diskvalifikoval. Dospel tak k téze o neautentickejšť obrazu Pythagora ako matematika. Pozoruhodným faktom z dejín vedy však je častý výskyt náboženských motívov v dielach významných vedcov. Práca *Transcendencia vo vede a v náboženstve*⁴⁸ ponúka výklad vzťahu náboženstva a vedy, ktorý nevychádza z katarzie (chápanej ako individuálna psychická premena), ale z *transcendencie* (chápanej ako kolektívna lingvistickej zmena) a otvára možnosť nového výkladu súhry racionálnych a iracionálnych prvkov vo vývine vedeckého poznania.

3.2 Pythagorejská náuka o číslach ako nematematická teória

Podľa Burkerta pythagorejská aritmetika nebola matematickou teóriou, ale tajným poznaním, spojeným s úžasom a fascináciou tajomnom: „Je to prvok nepredvídateľnosti, ktorý dáva tejto hre s číslami zdanie niečoho hlbokého a tajomného. Toto okultné kúzllo matematiky pochádza z toho, že ľudská myseľ zabúda na svoj spôsob napredovania a stráca z pohľadu vlastné predpoklady; pri pozornej analýze to, čo naivnú myseľ naplňa úžasom, pôsobí ako tautologické a samozrejmé. Čo nachádzame medzi pythagorejcami, je úžas a ‚uctievanie‘ niektorých čísel, ich vlastností a vzťahov. Párne a nepárne sú zjednotené v ‚sobáší‘; a pre nich to znamenalo, že pritom pôsobia kozmické sily. Dôkaz by sotva mohol byť niečím iným než nepríjemnosťou, lebo by ukazoval výsledok ako logický dôsledok predpokladov, a tým by ho redukoval na banalitu.“⁴⁹

„Čísla siahajú svojím pôvodom do prehistorických čias, ale matematická veda, vo vlastnom slova zmysle, sa nezrodila skôr než v Grécku šiesteho a piateho storočia pr. n. l. Ľudia poznali čísla pred matematikou; a bolo to behom predvedeckého obdobia, kedy sa zrodili ‚číselná mystika‘, či ‚číselná symbolika‘, či ‚numerológia‘, ktoré majú dokonca i dnes určitý vplyv. Nemožno prehliadať skutočnosť, že tento druh vecí bol prítomný aj v pythagoreizme.“⁵⁰ „Človek môže mať pokušenie toto všetko [číselnú symboliku] ignorovať, ako

48 Kvasz, L., *Transcendencia vo vede a v náboženstve*, c.d.

49 Burkert, W., *Lore and Science in Ancient Pythagoreanism*, c.d., s. 433.

50 Tamže, s. 466.

bočný výhonok na hlavnom kmeni pythagorejského učenia; ale podrobnejšie preskúmanie odhalí, že tento druh učenia musíme považovať nie za vetvu, ale za koreň, a to za koreň, ktorý ide veľmi hlboko.⁵¹ „To, že čísla majú metamatematický, kozmický význam a že odhaľujú princíp poriadku sveta a ľudského života, nie je žiadnym druhom vedeckého alebo filozofického vhľadu, ale charakteristikou pred-matematického myslenia o číslach. Pythagorejská číselná symbolika je preto omnoho staršia ako každá prírodná veda, matematika alebo astronómia, o ktorých si môžeme myslieť, že ich Pythagoras alebo jeho žiaci mohli praktikovať. Nemá nič spoločného s vedou v našom zmysle – čo znamená v gréckom zmysle – slova. ... Pythagorejská doktrína, že ‚všetko je číslo‘ vyrastá bezprostredne z ‚archetypálnej‘ číselnej symboliky, ktorá je v tej či onej podobe rozšírená po celom svete.“⁵² „Naším záverom musí byť, že v prípade číselnej symboliky, rovnako ako v prípade akuzmat, máme do činenia s doktrínou samotného Pythagora.“⁵³

Protiklad racionálnej aritmetiky a iracionálnej numerológie, ktorý je pre nás jasným, ostrým, jednoznačným a absolútnym protikladom, nemusel byť jasným, ostrým, jednoznačným a absolútnym protikladom v minulosti. Predovšetkým matematická racionalita, o ktorej zrode je tu reč, nie je niečím pevne daným, majúcim ostré hranice. Na rozdiel od Burkerta navrhujeme prijať tézu, že od iracionálneho k racionálnemu *vedie cesta*, síce nie priama a nie bezproblémová, ale predsa len cesta, a že táto cesta má *viaceré etapy*. Numerológia je v jasnom protiklade k aritmetike chápanej z hľadiska *záverečných etáp* spomínanej cesty. Ale na jej počiatkových etapách mohlo existovať učenie, ktoré malo znaky spoločné aj s numerológiou aj s aritmetikou. O pomoc sa môžeme obrátiť k dejinám alchýmie, ktorá je novovekým fenoménom analogických epistemologických vlastností. V tejto súvislosti si môžeme pripomenúť, že jedným z významných zástancov alchýmie bol aj Isaac Newton, v ktorého pozostalosti texty venované alchýmii svojim celkovým rozsahom prevyšujú rozsah prác venovaných fyzike (na základe ktorých ho považujeme za jedného z najvýznamnejších fyzikov všetkých čias). Tu máme doklad skutočnosti, že venovanie sa *zdanlivo iracionálnej* disciplíne, ako je alchýmia, nemusí vylučovať paralelné vrcholné racionálne vedecké výkony. A napísali sme „zdanlivo iracionálna“ – nie preto, že by sme chceli *dnes* hájiť racionálny status alchýmie, ale preto, lebo v *Newtonovej dobe* mala alchýmia mnohé črty spoločné s racionálnou vedou. Podľa nás sa alchýmia *stala iracionálnou* po vzniku pojmu chemického prvku na začiatku 19. storočia. Ale v dobe, kedy nič takého ako pojem chemického prvku neexistovalo, bol *jazyk alchýmie* jed-

51 Tamže, s. 468.

52 Tamže, s. 476.

53 Tamže, s. 478.

nou z možností, ako tematizovať *prax chemických pokusov*, v ktorej Newton vynikal. A čo je ešte dôležitejšie, pokiaľ nemáme pojem chemického prvku, nie je možné viesť hranicu oddeľujúcu racionálne používanie tohto jazyka od používania iracionálneho (teda takého, ktorému v chemickej praxi nič nekorešponduje).⁵⁴

Preto si myslíme, že aj numerológia sa *iracionálnou stala* až dodatočne, po rozpracovaní matematickej teórie čísel, a že v dobe pythagorejcov nebolo možné viesť jasnú hranicu medzi racionálnymi vlastnosťami čísel (*párne čísla, štvorcové čísla, trojuholníkové čísla*, čo sú vlastnosti aritmetickej povahy) a ich iracionálnymi vlastnosťami (*ženské čísla, mužské čísla*, čo sú vlastnosti spadajúce do numerológie). Podobne ako v súvislosti s chemickými reakciami aj s aritmetickými vzťahmi bolo nutné najprv nahromadiť dostatočné množstvo skúseností, aby sa hranica medzi alchýmiou a chémiou, rovnako ako medzi numerológiou a aritmetikou, začala jasnejšie črtat.

Niektorí historici používajú Newtonovo alchymistické dielo ako argument proti racionalite vedy. Podľa nás je ich argumentácia pomýlená, rovnako ako je pomýlená Burkertova argumentácia upierajúca Pythagorovi miesto v dejinách matematiky. V oboch prípadoch je omyl rovnaký – projekcia súčasného ostrého a jasného rozlíšenia (chémie a alchýmie, resp. aritmetiky a numerológie) na štádium, kedy takéto ostré rozlíšenie neexistovalo, a teda kde sa v jednej aktivite spolu stretali a neoddeliteľne miesili prvky, ktoré *nám pripadajú* ako racionálne, s prvkami, ktoré *sa nám zdajú* iracionálne. Keďže moderná chémia resp. aritmetika vznikli na báze odmietnutia alchýmie resp. numerológie, máme tendenciu Newtonovu laboratórnu prax (v ktorej je skryté množstvo racionálneho chemického poznania) rovnako ako aritmetickú prax pythagorejcov odmietnuť ako iracionálne. Podľa nás to však nie je vecne správne ani vedecky zdôvodnené.

3.3 Aritmetika ako protiklad geometrického štýlu gréckej matematiky

Burkert píše: „...existuje pozoruhodný druh aritmetiky, ktorý sa objavuje výlučne v pythagorejskej tradícii, v ktorej čísla sú reprezentované obrazcami z kamienkov, *pséfoi*“⁵⁵ „To, že sa pythagorejci intenzívne zaoberali číslami, je dobre doložený fakt, ale otázne je, v akom zmysle je možné túto aktivitu nazvať matematikou, lebo paradigmatická forma gréckej matematiky ako

54 Tým nechceme spochybňovať, že sa v alchýmii vyskytovalo množstvo podvodníkov. Chceme len povedať, že v nej mohli vedľa podvodníkov existovať aj úplne racionálni bádatelia, ktorí, podobne ako Newton, mali záujem predovšetkým o chemické pokusy a o reprodukovateľné fakty. Pretože neexistovalo nič lepšie, používali jazyk alchýmie, a preto ich výskumy boli zatienené množstvom iracionálnych (z dnešného pohľadu) presvedčení.

55 Burkert, W., *Lore and Science in Ancient Pythagoreanism*, c.d., s. 427.

deduktívnej vedy založenej na axiómach, je geometria.⁵⁶ „Videná v kontexte gréckej geometrie, pythagorejská aritmetika je cudzorodým, kvázi-primitívnym prvkom.“⁵⁷ Keď Burkert dáva do kontrastu geometriu, ktorú považuje za charakteristickú pre celú Grécku matematickú tradíciu, s pythagorejskou aritmetikou, robí tak preto, lebo geometria mu stelesňuje úroveň matematického myslenia, ktorú Gréci dosiahli, kým pythagorejskú aritmetiku vníma ako súčasť primitívnejšej vrstvy, ktorú považuje za *kvalitatívne* odlišnú od geometrie, za „*cudzorodý, kvázi-primitívny prvok*“. Samozrejme nemožno popierať, že pythagorejská aritmetika predstavuje primitívnejší stupeň rozvoja než euklidovská geometria. Rozdiel medzi nimi je však, podľa nás, *rozdielom stupňa* a nie kvality.

V knihe *Patterns of Change*⁵⁸ sme predstavili koncepciu rozvoja matematiky, v ktorej sme jazyk matematiky interpretovali ako reprezentačný nástroj, pomocou ktorého matematici vytvárajú reprezentácie objektov, ktoré skúmajú. Rozlíšili sme pritom dva druhy nástrojov: *nástroje symbolickej reprezentácie* (aritmetika; algebra; diferenciálny a integrálny počet; predikátová logika) a *nástroje ikonickej reprezentácie* (syntetická geometria; analytická geometria; iteratívna geometria; teória množín). Jazyk (pythagorejskej) aritmetiky bol *prvým* nástrojom symbolickej reprezentácie, kým jazyk (euklidovskej) geometrie *prvým* nástrojom ikonickej reprezentácie. Každý z uvedených ôsmich nástrojov sme charakterizovali z hľadiska parametrov, ktoré nazývame *potencialitami jazyka* (logická sila, expresívna sila, integratívna sila, explanatorická sila). Z ich hľadiska je prechod od elementárnej aritmetiky k syntetickej geometrii významným krokom vpred. Preto nespochybňujeme Burkertovo pozorovanie týkajúce sa primitívnejšieho charakteru pythagorejskej aritmetiky oproti geometrii.

Nesmieme však zabúdať, že jazyk syntetickej geometrie ani zďaleka nie je posledným reprezentačným nástrojom v dejinách matematiky a prechod k jazyku algebry či analytickej geometrie prináša úplne analogický nárast potencialít jazyka, akého sme boli svedkami pri prechode od aritmetiky k syntetickej geometrii. Preto možno konštatovať, že Burkertova argumentácia sa zakladá na zúženom pohľade na matematiku. Keď sa obmedzíme iba na jazyk aritmetiky a syntetickej geometrie, môžeme v prechode od prvého k druhému vidieť zásadný, kvalitatívny skok, kvôli ktorému môžeme mať sklon aritmetike upierať status vyspelej matematiky. Keď sa však na ten istý prechod pozrieme z hľadiska analogických prechodov (od syntetickej geo-

56 Tamže.

57 Tamže, s. 434.

58 Kvasz, L., *Patterns of Change, Linguistic Innovations in the Development of Classical Mathematics*. Basel, Birkhäuser Verlag 2008.

metrie k algebre; od algebry k analytickej geometrii; či od analytickej geometrie k diferenciálnemu a integrálnemu počtu), prvý prechod stratí nádych radikálnosti a stane sa z neho štandardná vývinová zmena, akých sa v dejinách matematiky odohrala celá rada. Rovnako ako je elementárna aritmetika „primitívna“ pri porovnaní s euklidovskou geometriou, je euklidovská geometria „primitívna“ pri porovnaní s algebrou.

Uvedený prechod, v protiklade k tomu, ako ho vidí Burkert, svedčí o tom, že pythagorejská aritmetika *patrí do dejín matematiky*, lebo má *potenciality jazyka* zhodné s potencialitami ostatných jazykov matematiky. Prechod od pythagorejskej aritmetiky k euklidovskej geometrii je *štandardným* prechodom, akých sa v dejinách matematiky odohrala celá rada. Burkertova analýza jasne odlíšila dva reprezentačné nástroje a presne charakterizovala rozdiely medzi nimi. Ale v dôsledku nedostatočne širokej perspektívy tieto rozdiely vyložila ako rozdiely kvality, pričom kvôli nim upiera pythagorejskej aritmetike miesto v dejinách matematiky, čo nie je ani vecne správne, ani vedecky zdôvodnené.

3.4 Induktívna metóda ako protiklad deduktívnej axiomatickej metódy

Burkert stotožňuje matematiku s deduktívnou geometriou – a v jej mene upiera matematickým výsledkom pythagorejcov status autentickej matematiky: „Induktívny druh aritmetiky bez dôkazov, ktorý sa vyskytoval dlho po Platónovi, patrilo spolu s niekoľkými základnými pravidlami, ranným pythagorejcom.“⁵⁹ „Bol to vývin od elementárnej aritmetiky k deduktívnej geometrii, ku ktorému došlo až v neskoršom období, ktorý umožnil vznik matematiky ako vedy – vývin, ktorý vedie skrze Archyta k Eudoxovi.“⁶⁰ „U Euklida sa teória rozvíja systematickým spôsobom, jedna propozícia predpokladá predošlú v striktnom deduktívnom poriadku, kým dôkaz pomocou psofoi je svojou podstatou induktívny a názorný. ... nepredpokladá iné propozície; každý súbor faktov je evidentný sám o sebe. Nie je tu potrebná deduktívna štruktúra, ktorá tvorí podstatu deduktívnej matematiky.“⁶¹ Tak ako v predošlých prípadoch ani teraz nechceme spochybniť Burkertove postrehy. Medzi „induktívnou metódou“, ako Burkert charakterizuje pythagorejskú aritmetiku, a deduktívnou geometriou nepochybne existuje rozdiel. Ale opäť ide skôr o rozdiel stupňa.

To základné, čo musíme mať v jazyku matematiky, aby bolo možné viesť dôkazy, sme v texte o Thalétovi nazvali *deduktívnou syntézou*. Keď porovnáme pythagorejskú matematiku s thalétovskou, nie je ťažké rozpoznať zásadný

59 Burkert, W., *Lore and Science in Ancient Pythagoreanism*, c.d., s. 433.

60 Tamže, s. 49.

61 Tamže, s. 435.

rozdiel spočívajúci v tom, že thalétovskej geometrii chýba princíp deduktívnej syntézy, kým v pythagorejskej matematike ho je možné nájsť. *Druh deduktívnej syntézy*, ktorý nachádzame v pythagoreizme, je nepomerne primitívnejší než ten, ktorý obsahuje euklidovská geometria. U pythagorejcov nemáme axiómy a postuláty ani jasnú predstavu o štruktúre deduktívneho argumentu. Ale podľa nás je nesprávne pythagorejskú aritmetiku považovať za čisto indukčnú disciplínu. Ona bola deduktívna, len jej princíp deduktívnej syntézy bol primitívnejší než princíp syntézy euklidovskej geometrie. Ale nie je pravdou, že by pythagorejská matematika deduktívne dokazovanie nepoznala. Figurálne čísla predstavujú skvelý, aj keď obmedzený nástroj dokazovania.

SUMMARY

Pythagorean Mathematics in the Light of Cartesian Physics

This paper is the second part in a series of articles aimed at reconstructing the emergence of mathematics as a deductive discipline in ancient Greece in the period between Thales and Euclid. We understand the emergence of mathematics as the birth of a language which enables the undertaking of deductive proofs. While in the preceding part we focused on the beginnings of Greek mathematics in Thales, here we concentrate on Pythagorean mathematics. In the literature the significance of Pythagoras as a mathematician is called into doubt. Despite this, the main part of the paper involves a reconstruction of the cognitive style of Pythagorean mathematics and this reconstruction is the basis for a defence of its authenticity.

Keywords: history of mathematics, Pythagoras, proof, Walter Burkert

ZUSAMMENFASSUNG

Die pythagoreische Mathematik im Licht der kartesischen Physik

Die vorliegende Abhandlung ist die zweite Fortsetzung einer Serie von Artikeln zur Rekonstruktion der Entstehung der Mathematik als deduktiver Disziplin im antiken Griechenland zur Zeit zwischen Thales und Euklid. Die Entstehung der Mathematik verstehen wir als Geburt einer Sprache, mit deren Hilfe deduktive Beweise geführt werden können. Während wir uns in univerzálného zákona fyziky der vorherigen Folge mit den Anfängen der griechischen Mathematik bei Thales befassten, konzentrieren wir uns hier auf die pythagoreische Mathematik. In der Literatur wird die Bedeutung Pythagoras' als Mathematiker in Frage gestellt. Daher besteht der Kern der Abhandlung in einer Rekonstruktion des kognitiven Stils der pythagoreischen Mathematik und in einer auf dieser Rekonstruktion aufbauenden Argumentation zu Gunsten ihrer Authentizität.

Schlüsselwörter: Geschichte der Mathematik, Pythagoras, Beweis, Walter Burkert