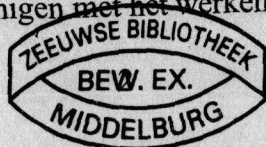


686 54

Bosman's Boom van Pythagoras.

De meeste mensen hebben wel eens gehoord van de stelling van Pythagoras. Dat hij de stelling niet bedacht heeft is iets minder bekend. En van de boom had hij al helemaal geen weet.

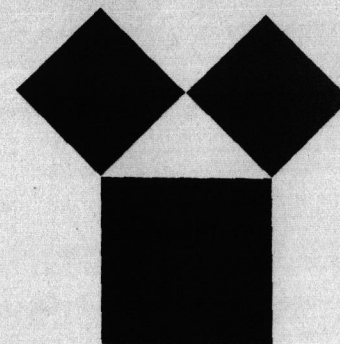
Deze is ontsproten aan de fantasie van Ir. A.E. Bosman. Over de persoon van Ir. Bosman citeren we het volgende uit het boek *"Bomen van Pythagoras"* van Bruno Ernst. Albert Ernst Bosman (1891-1961) volgde de studie elektrotechniek in Delft. Hij was echter in hart en nieren leraar. Wat hij zelf had ervaren als interessant, mooi en goed, wilde hij anderen laten meebeleven. Hij was dan ook slechts kort werkzaam als elektro-technisch ingenieur; het grootste deel van zijn leven gaf hij les in wis- en natuurkunde. Het is enigszins tragisch dat juist zijn afwijkende opvattingen op het gebied van vorming en onderwijs aanvankelijk een struikelblok vormen bij zijn sollicitaties. Hij was bevriend met Betty en Kees Boeke en had grote sympathie voor de Werkplaats van Boeke. In het begin van de Tweede Wereldoorlog was hij korte tijd werkzaam bij de Amsterdamse vestiging van AEG, die door de bezetters ingeschakeld was voor het ontwerpen van elektrische apparatuur op de Duitse U-boten. Hij kon zich echter niet verenigen met het werken aan projecten die



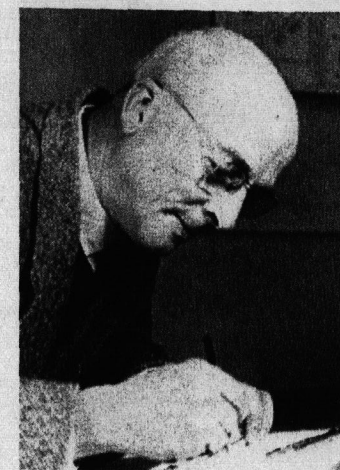
ERNST, B. / BOSMAN, E.

uiteindelijk ingezet zouden worden voor oorlogsdoeleinden. Aanvankelijk kwam hij tot een originele vorm van sabotage: onder zijn elektronische ontwerpen lag een vel tekenpapier waarop hij weken lang werkte aan de groei van zijn wiskundige ideeën ... daar groeide de boom van Pythagoras.

Het begon allemaal met een simpel vierkant. Op deze vierkante stam komt dan een driehoek als spruit. En het begin van de boom is er. Aan de spruit ontlukt aan beide zijden een zijtak in de vorm van een vierkant. Iedere zijtak krijgt weer een driehoekige spruit waaraan weer nieuwe vierkante takken groeien. En zo gaat het verder en verder, maar ook kleiner en kleiner.



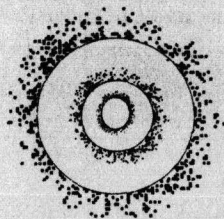
En dat is precies wat Ir. Bosman gedurende zo'n 1200 uur gedaan heeft met het resultaat dat op de poster te zien is. Dit is echter niet het enige dat Ir. Bosman getekend heeft. Hij heeft het boek *"Het wonder onderzoekingsveld der vlakke meetkunde"* geschreven en voorzien van meer dan 100 tekeningen van zijn hand. In het voorwoord zegt Dr. H. Groot ondermeer: "Het gaat hier,



ondanks de vorm, niet om een léérboek, maar om een boek dat door zijn inhoud wil opwekken tot eigen werkzaamheid." En: "Het boek heeft niet de bedoeling kennis bij te brengen door een bepaalde *leerstof* te verwerken. Het wil zijn lezer treffen door de schoonheid van harmonische figuren die ontstaan als men consequent gaat *spelen* met meetkundige vormprincipes.

De schrijver tracht ook door het opnemen van vele aforismen op te wekken tot het doordenken van wijsgerige en didactische gedachten."

Wiskunde kan de gevaarlijkste hartstocht zijn; je krijgt er honger naar waarheid van.



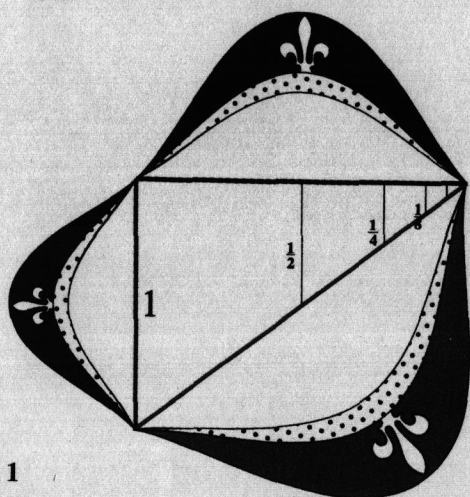
Bernard Shaw.

In de inleiding schrijft Ir. Bosman o. a.: "Misschien zijn er meer personen, of zelfs velen, die zoals ik de wiskundeopleiding van middelbaar en hoger onderwijs ontvingen zonder daar warm of koud bij te worden. Daar waren de exameneisen, waaraan je moest voldoen, maar verder heerste er op dit terrein voor jezelf alleen passiviteit. (Herkent U dit? *red.*) Dit veranderde echter geheel toen ik de dissertatie van dr. Hermann von Baravalle (Wenen 1921) in handen kreeg, getiteld: "*Zur Pädagogik der Physik und Mathematik, dargestellt an Hand praktischer Beispiele*". Deze schrijver inspireerde mij en in mij opende zich een weg tot jarenlange activiteit, die mij het wonder der schoonheid, ook in schoolse vlakke meetkunde deed ontdekken. Hiervan iets mede te delen, is de bedoeling van deze bladzijden."

Indien u de boeken "*Geometrie als Sprache der Formen*" en "*Darstellende Geometrie nach dynamischer Methode*" beide van Prof. Dr. Hermann von Baravalle kent zult u kunnen zien dat veel van de sfeer en manier van benaderen terug te vinden is bij Ir. Bosman. Het is geen droge kost of opsomming van stellingen met bewijzen. Het zijn meer spannende, verhalende, vertelde meetkundige zaken, waarbij verbanden vanzelf tevoorschijn komen en in elkaar overgaan.

Zo begint Bosman met te onderzoeken naar wat er gebeurt, indien van een driehoek twee elementen gegeven worden en een vaste waarde houden terwijl de andere veranderen. Daarbij komen dan reeksen naar voren en prachtige figuren. Hij gaat dan verbanden zoeken en komt zo weer op de rechthoekige driehoek en via de samenhang der elementen in een driehoek op de stelling van Pythagoras. De stelling van Pythagoras leert dat de oppervlakte van het vierkant op de hypotenusa gelijk is aan de som van de oppervlakten van de vierkanten beschreven op de rechthoekszijden. En de zoektocht gaat verder met de stelling en zo komt naar voren dat de stelling altijd geldt. Ook indien op de drie zijden andere figuren dan vierkanten getekend worden, mits deze alle drie maar gelijkvormig zijn.

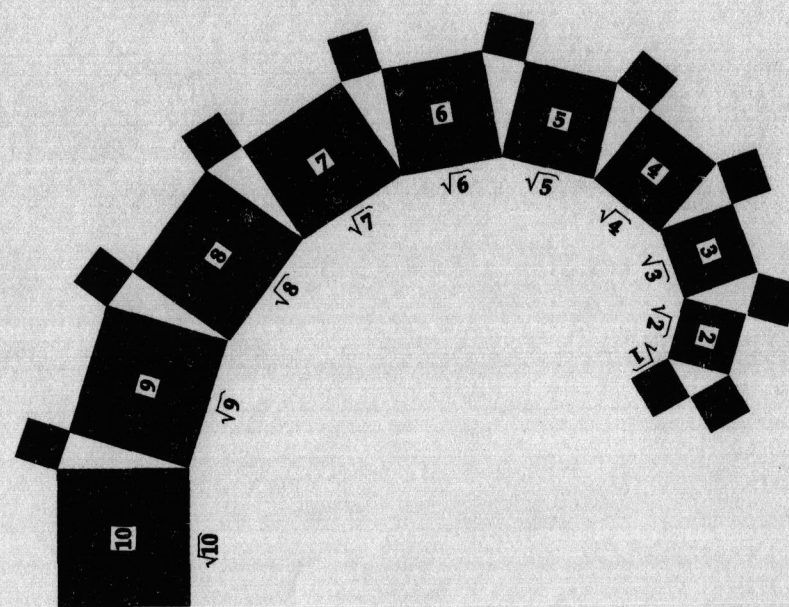
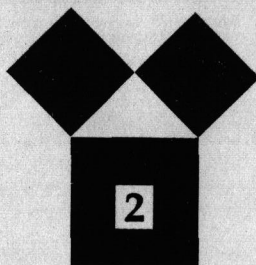
Een voorbeeld hiervan kunt u in tekening 1 zien. Daar kunt u ook een reeks zien die ontstaat door met een rechthoekige driehoek te beginnen. Daarvan blijven alle hoeken gelijk doch de zijden worden steeds gehalveerd of verdubbeld. Dit is afhankelijk van welke driehoek u uitgaat. De lengten der zijden zijn dan wel allemaal machten van 2.



Tekening 1

Dit is een 3 – 4 – 5 rechthoekige driehoek waarin dan ook geldt $3^2 + 4^2 = 5^2$. Echter is hier ook de som van de oppervlakte van het groene vlak en de oppervlakte van het rode vlak samen even groot als de oppervlakte van het gele vlak. Bosman bekeek de stelling van Pythagoras als een soort theorema en beredeneerde zo dat als je twee van de drie vierkanten wist, je het derde kon berekenen c.q. construeren. Weer anders gezegd: je telt twee vierkanten op om tot een derde te komen.

Hij nam nu twee vierkanten van 1 cm^2 en telde die bij elkaar op. Zo ontstaat een vierkant met oppervlakte 2 cm^2 . Maar nu hield hij één vierkant met een constante oppervlakte van 1 cm^2 en telde dat steeds bij het nieuwe vierkant op. Het resultaat was dat het andere vierkant voortdurend groter werd. Een deel van het resultaat kunt u in tekening 2 zien.



Tekening 2

Ook uit deze tekening zijn weer vele vragen te destilleren. U kunt leerlingen een deel van deze "spiraal" laten tekenen, als oefening in het omgaan met passer, liniaal en gradenboog en het meten van lengten en graden.

Is de stelling bekend dan zijn er vele mogelijkheden meer. Zoals in tekening 2 te zien is, ontstaan de natuurlijke getallen als oppervlakte der groter wordende vierkanten. De wortels uit de natuurlijke getallen ontwikkelen zich als de zijden der groter wordende vierkanten.

Uitgaande van het kleinste vierkant is het dan mogelijk de stand der zijden van de groter wordende vierkanten te berekenen?

Indien de oppervlakten der vierkanten achtereenvolgens opgeteld worden, wat voor getallen komen er dan? En hoe zit dat met de omtrekken der opeenvolgende groter wordende vierkanten? Is er een algemene formule voor de omtrek van het n^e grote vierkant?

U ziet hoe één tekening tot vele vragen kan leiden en zo zijn er in het boek vele figuren en daarmee samenhangende vragen.

Terugkerend naar de boom van Pythagoras kan gezegd worden dat dit duidelijk een voorbeeld is van een figuur die de eigenschap bezit dat "oneindig" veel onderdelen ervan gelijkvormig zijn met de hele figuur. Het overbekende voorbeeld is de verpleegster op het busje Droste cacao. Daar zijn de gelijkvormige figuren in elkaar vervat, van iedere maat is er één aanwezig. Bij de boom van Pythagoras is niet sprake van één in elkaar geschakelde rij. Bij iedere verkleining vindt een vertakking plaats in twee congruente delen. In de plaat van de boom zijn van een bepaalde maat steeds een aantal congruente exemplaren aanwezig en dit aantal is steeds een macht van 2.

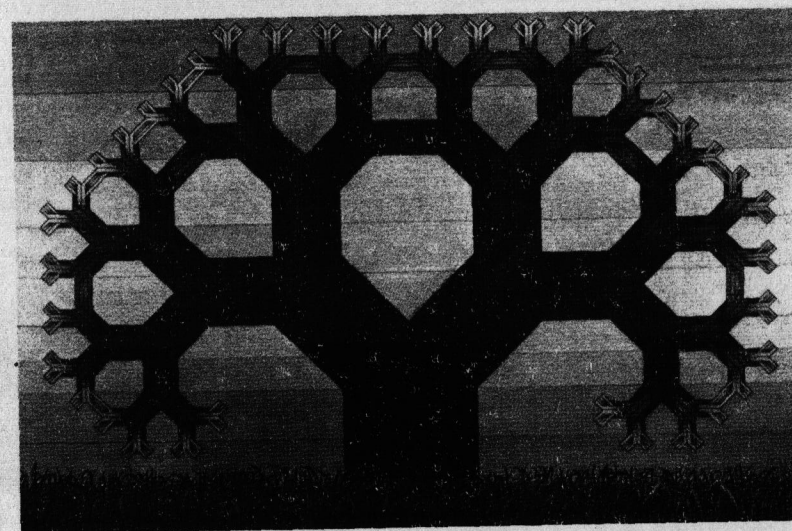
Wordt er op het basis vierkant een niet-gelijkbenige rechthoekige driehoek getekend dan gaat de boom scheef groeien.

Ir. Bosman geeft een figuur uitgaande van een rechthoekige driehoek met hoeken van 30° en 60°. Hoe zou het nu zitten met oppervlakten en verkleiningsfactoren?

Er zijn natuurlijk nog andere varianten bij de boom van Pythagoras te verzinnen. Men kan de boom een wortelstelsel geven. Men zou kunnen proberen in plaats van vertakkingen in twee nieuwe loten steeds drie nieuwe loten te laten ontstaan.

Professor Verhoeff heeft driedimensionale bomen ontworpen. In hout uitgevoerd zijn het prachtige objecten geworden.

De kunstenaar Jos de Mey heeft een zeer groot aantal artistieke variaties op het thema gemaakt. Het door Bruno Ernst verzorgde boekje *"Bomen van Pythagoras. Variaties van Jos de Mey"* bevat tientallen variaties, soms in de stijl van andere kunstenaars zoals Magritte, Mondriaan, Van der Leek en anderen, soms als baksteen constructies. (Voor een voorbeeld zie tekening 3.)



Goed beredeneerde spieranatomie van een niet-bestaande boom.

Tekening 3

In deze uitgave is ook een levensbeschrijving van Ir. Bosman opgenomen en enkele diepgaande wiskundige beschouwingen over de boom.

Men maakt uit de leerling een volgeling van andermans ideeën in plaats van hem zelf te leren denken en hem tot een vorser in daad en gedachte te doen groeien.

Herbert Spencer.

Dit was wat Bosman nu juist niet wilde met zijn boek. Hij wilde de leerling actief betrekken bij meetkundig onderzoek. Een voorbeeld (blz. 87-89):

”Deze figuur blijkt veel overeenkomst te vertonen met de Pythagoreïsche boom. Hij is eenvoudiger van bouw door het ontbreken van tussenruimten, maar dezelfde achtkantige vruchten blijken ook hier te hangen.

Als er interesse bestaat, zouden verschillende leerlingen ieder een tekening kunnen maken, gebouwd op dezelfde grondmaten, zó dat op elke tekening één generatie van driehoeken met bepaalde kleur aangegeven worden. Tezamen zouden zij dan de hele ontwikkeling kunnen vertonen.”

Voor de figuren 122 tot en met 126 in *”Het wondere onderzoekingsveld ”* gebruikt Ir. Bosman de term *”Straling van punten op een cirkelomtrek”*.

Dit leidt hij in met een citaat van R.M. Rilke:

*Nichts ist mir zu klein
Und ich liebe es trotzdem
Und mal es auf Goldgrund und groß
Und halte es hoch und ich weisz nicht wenn
Löst es die Seele los.*

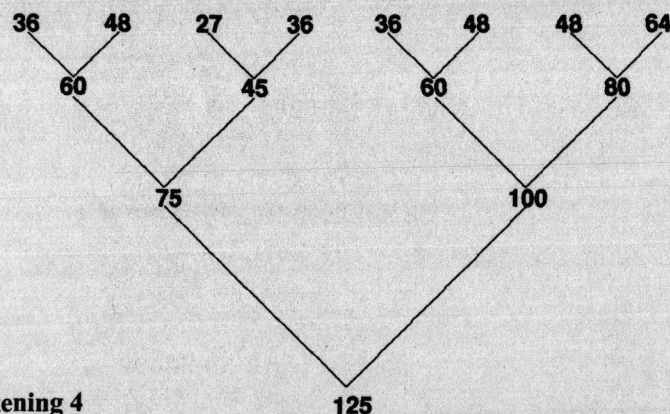
Het idee is eenvoudig en kan tegenwoordig heel simpel met een grafisch computer programma getekend worden. Teken een regelmatige veelhoek en teken hier alle diagonalen in. Soms worden in de figuur een aantal diagonalen ook buiten de omtrek van de veelhoek verlengd. Het loont de moeite zelf eerst eens met de hand en potlood (met scherpe punt!) en liniaal dit proces voor bijvoorbeeld een regelmatige twaalfhoek uit te voeren. Dan kunnen direct bepaalde symmetrieën ontdekt worden en dat drietallen lijnen door één punt gaan. Maar ook dat er zeer netjes en nauwkeurig gewerkt moet worden.

Uitgaande van een veelhoek met meer dan twaalf hoekpunten ontstaan dan figuren die doen denken aan werkstukken van de franse kunstenaar François Morellet en de Amerikaanse kunstenaar Sol LeWitt. Maar het werk van Bosman is ouder!

Wanneer je de twaalfhoek of zestienhoek zelf eens met de hand getekend hebt kom je onder de indruk van het vakmanschap van Ir. Bosman als je zijn figuren, die gebaseerd zijn op de regelmatige achtenveertighoek, bekijkt.

De meetkundige opgaven in *”Het wondere onderzoekingsveld ”*, waarvan de boom van Pythagoras een hoogtepunt is, worden een bijzondere uitdaging voor de leerling om met meetkunde bezig te zijn.

Dat de stelling van Pythagoras de mensen van oudsher bezig houdt, blijkt wel uit de vele boeken en artikelen hierover. Zo is een artikel over de stelling van Pythagoras in de derde dimensie te vinden in het tijdschrift "The Mathematics Teacher", Volume 74, Number 2, Page 98. Een andere spiraal staat in het tijdschrift Pythagoras, jaargang 25, nummer 3, bladzijde 7. En een soort getallenboom van Pythagoras is te vinden in het tijdschrift Pythagoras, jaargang 32, nummer 6, bladzijde 14. Zie tekening 4 hieronder.



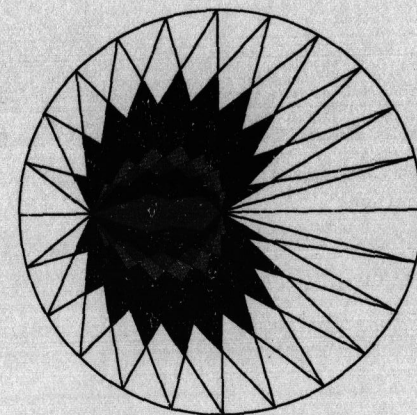
Tekening 4

Een vervolg hierop staat in jaargang 33, nummer 3/4, blz. 4. In het begin van zijn boek heeft Bosman het over de constructie van driehoeken. Hij vraagt zich af welke en hoeveel elementen een driehoek bepalen. Hij kiest twee elementen en maakt dan tekeningen om te zien wat het gevolg is van het kiezen van een derde element.

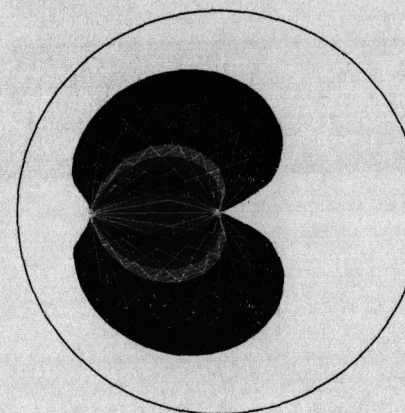
Zo heeft hij twee tekeningen gemaakt waarbij hij twee zijden vast neemt. Een van de zijden staat stil en de andere draait in een cirkel met telkens 15° verder rond.

Bosman tekent een figuur waarbij de zijden a en c gegeven zijn met $c > a$ en c draait. Naar aanleiding van de tekening vraagt Bosman zich dan o. a. af wat voor figuren er ontstaan indien bij elkaar horende snijpunten verbonden worden. Deze figuur is te zien in tekening 5.

Later komt hij hier weer op terug als hij het heeft over twee punten en de straling die daar van uitgaat. Als hij dan komt bij draaiing van straling in gelijke zin verwijst hij naar tekening 5 en stelt dan de driehoeken te beschouwen als gekleurd glas.



Tekening 5

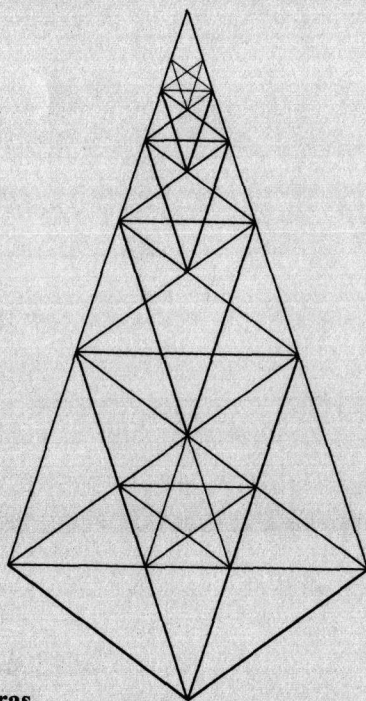


"De toppunten van enkel dik glas liggen dan op een cirkel, die van dubbel-dik glas op een meloen-vormige kromme, enz." Dit is in tekening 6 te zien.

Tekening 6

Als laatste ziet u hieronder de luit van Pythagoras. Die staat niet in het boek van Bosman.

De figuur heeft, wat de afmetingen betreft, niets met de stelling te maken doch alles met de gulden snede. De naam houdt vermoedelijk verband met het feit dat de luit bestaat uit regelmatige vijfhoeken en pentagrammen. En het pentagram gold als geheim herkenningsteken voor de Pythagoreeërs.



Luit van Pythagoras

Op de volgende bladzijde staan enkele opgaven voor leerlingen.

Opgave 1

Teken in een vierkant de lijnen die de middens van de zijden verbinden.

Beredeneer met deze figuur dat het vierkant op de hypotenusa van een gelijkbenige rechthoekige driehoek twee keer zo groot is als het vierkant op een zijde van zo'n driehoek.

Opgave 2

Teken een rechthoekige driehoek met hoeken van 30° en 60° . Teken op de drie zijden van deze driehoek gelijkzijdige driehoeken. Teken vanuit het hoekpunt van de rechte hoek de zwaartelijns naar de hypotenusa. Verdeel de grootste driehoek in vier congruente gelijkzijdige driehoeken. In de figuur zijn nu zes gelijkzijdige, even grote driehoeken. Deze zes zijn het begin van een overdekking van het vlak met allemaal gelijke gelijkzijdige driehoeken, teken er nog wat meer van. Bewijs nu, zonder de stelling van Pythagoras te gebruiken, dat de som van de oppervlakten van twee gelijkzijdige driehoeken op de rechtehoekszijde van de oorspronkelijke driehoek gelijk is aan de oppervlakte van de gelijkzijdige driehoek op de hypotenusa.

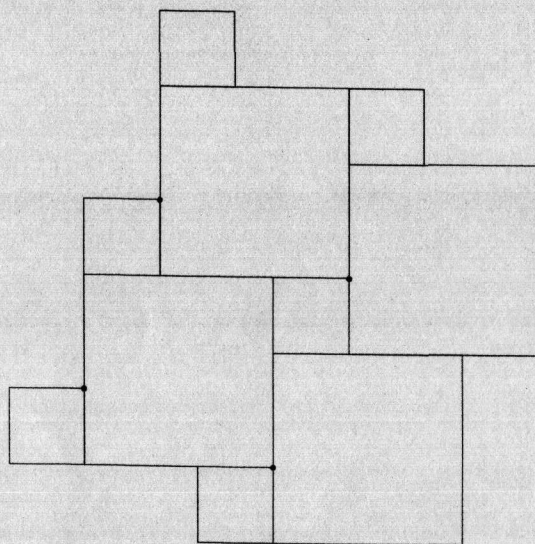
Opgave 3

Teken een willekeurige rechthoekige driehoek ABC met de rechte hoek in C. Spiegel deze driehoek in de hypotenusa. Teken met AC als hypotenusa een, met de oorspronkelijke driehoek, gelijkvormige driehoek en wel zo dat bij het hoekpunt A drie gelijke hoekjes ontstaan. Teken op dezelfde manier op de zijde BC ook een gelijkvormige driehoek met BC als hypotenusa, zodat bij hoekpunt B drie gelijke hoekjes ontstaan. Spiegel de twee laatst getekende driehoeken in de zijden AC en BC resp.

Kun je hier een bewijs van de stelling van Pythagoras uit afleiden?

Opgave 4

Leg met vierkante tegels van twee verschillende maten een tegelvloer op de manier als hieronder aangegeven.



Verbindt de vier dik aangegeven punten. Laat zien dat je de stukken van dit vierkant, waarin het door de er in getekende lijnen wordt verdeeld, kunt gebruiken om twee vierkanten, het ene zo groot als de grote tegel, het andere zo groot als de kleine tegel, samen te stellen. Daarmee heb je de stelling van Pythagoras met de figuur aangetoond.