

Arithmétique et musique en Grèce ancienne : Instruments, intervalles, nombres

(version révisée et corrigée en 2014)

François Baskevitch
2012-2014

Avant propos

L'objet principal de mes recherches est l'étude des théories de la propagation du son de l'Antiquité à l'Encyclopédie.

Lorsque on se penche sur les représentations du son en Grèce antique, il est difficile d'éviter ce qu'on a longtemps désigné du nom d'acoustique et qui concernait la théorie musicale envisagée comme une branche des mathématiques. Depuis le XVIIIème siècle, l'acoustique est devenue une partie de la physique et c'est l'acception qui lui est généralement dévolue aujourd'hui : son objet est l'étude de la propagation du son, musical ou non, et des usages qui lui ont été dédiés depuis deux siècles.

Ce volume comprend une première partie qui concerne les instruments de musique de l'Antiquité, du point de vue de leur fonctionnement acoustique et de leur variété selon les époques et les cultures. La seconde partie s'intéresse aux instruments à cordes qui ont permis l'élaboration d'une théorie des degrés musicaux séparés par les intervalles. La troisième partie concerne les rapports entre arithmétique et théorie des intervalles, à partir de l'époque de Pythagore, au Vème siècle avant notre ère. Dans la dernière partie, on aborde quelques théories pré-aristotéliennes du IVème siècle qui ont joué un rôle dans la construction de l'harmonie occidentale jusqu'à la Renaissance. On trouvera dans les annexes de nombreux tableaux destinés à illustrer la genèse de la théorie des intervalles et de la construction des gammes et des modes en occident.

L'auteur

Biographie

Electronicien et acousticien, né en 1954, François Baskevitch a effectué une longue carrière dans le domaine de la musique électronique et de l'électro-acoustique. Il se consacre à temps plein à l'Histoire des sciences depuis 2003, et particulièrement à l'histoire de l'acoustique physique.

Il est titulaire d'un diplôme d'ingénieur en télécommunications et traitement du signal audio (Télécom-Lille), d'un DEA (Lille, 2003) et d'un doctorat en Histoire des Sciences (Nantes, 2008).

Le domaine de recherches de François Baskevitch est l'histoire de l'acoustique physique et des théories de la propagation du son, de l'Antiquité aux Lumières.

François Baskevitch est chercheur au laboratoire STL (Sciences, textes, langages), UMR 8163 de l'Université de Lille 3.

Thèse de doctorat en histoire des sciences

Les représentations de la propagation du son, d'Aristote à l'Encyclopédie
(Centre François Viète, Université de Nantes, oct. 2008, mention 'très honorable')

Résumé :

Entre la théorie de la musique et l'étude de la perception, il y a peu d'espace, dans la science scolastique, consacré à la physique des sons. La mécanique aristotélicienne ne prévoit pas le mouvement sans transport de matière et cette lacune constitue un blocage. A partir du début du XVI^e siècle, de nombreux savants traitent le sujet, parfois dans des ouvrages entiers, souvent en quelques lignes. Le phénomène est invisible et fugitif, alors on invente des représentations. Parmi elles, la célèbre métaphore des ronds dans l'eau rencontre un succès certain, mais également le flux de corpuscules ou les rayons sonores. La rédaction de l'Encyclopédie est contemporaine de la mathématisation de la propagation des ondes, avec la modélisation par les cordes vibrantes. A travers une Histoire de l'Acoustique Physique, on entreprend ici l'étude des représentations du son et des controverses qu'elles suscitent parmi les différents courants de la pensée scientifique, de l'Antiquité aux Lumières.

Jury :

Patrice Bailhache, professeur émérite, Université de Nantes (Directeur de thèse)

M. François de Gandt, professeur, Université de Lille 1, président du jury.

M. Michel Blay, directeur de recherches CNRS, rapporteur.

M. Frédéric de Buzon, professeur, Université de Strasbourg, rapporteur.

M. Jean Rosmorduc, professeur honoraire, Université de Brest.

M. Robert Muller, professeur, Université de Nantes.

Table

Les instruments de musique en Grèce ancienne	6
Introduction sur les instruments de musique	7
Éléments d'acoustique	8
Les trois grandeurs du son : hauteur, intensité, timbre	8
Excitateurs et résonateurs dans les instruments de musique.....	11
Généralités sur les instruments à vent.....	14
Les instruments à vent en Grèce antique	26
La syrinx.....	26
L'aulos	27
Les instruments à cordes en Grèce antique et chez les « barbares »	32
Les légendes : Hermès, Amphion.....	32
La lyre grecque.....	36
Phorminx et kitharis chez Homère	39
Les origines asiatiques (mésopotamiennes) de la kithara.....	43
Les dérivés de la lyre : barbitos, pectis, magadis	48
Les instruments à cordes inégales : sambuka, harpes	49
Les instruments à cadre du Levant : kinnôr, trigone, nebel	50
Les instruments à manche et table : pandoura, luths	53
De la barbarie, selon Platon, des instruments polyharmoniques	55
Le nombre de cordes de la lyre structure l'harmonie.....	57
Les textes	58
Les origines de la musique grecque.....	59
Les systèmes primitifs décrits par Helmholtz à l'origine des systèmes grecs	61
La lyre de Terpandre.....	64
Éléments de l'harmonie grecque	65
Les représentations de la hauteur du son	65
Rapports d'intervalles.....	68
La division du tétracorde : les trois genres	70
Mise au point sur les petits intervalles	74
Modes musicaux grecs anciens.....	75
Les tétracordes conjoints de la lyre heptacorde	76
L'accord des deux tétracordes de l'heptacorde : octave ou septième ?	78
Les hypothèses de l'heptacorde couvrant une octave	80
La lyre heptacorde selon le manuscrit de l'Hagiopolite	81
L'heptacorde de Terpandre selon Otfried Müller	83
L'heptacorde d'Olympos et le début du genre enharmonique.....	84
La musique au service des mathématiques : Pythagore	87
Les Pythagoriciens et la musique grecque ancienne	88
L'école et la pensée pythagoricienne	88
En marge du pythagorisme, un théoricien de la musique, Archytas de Tarente.....	90
Le nombre comme concept	92
Les obstacles à une physique pythagoricienne	94
Les Pythagoriciens et les mathématiques musicales	96
La théorie des premiers harmoniciens.....	96

La hauteur du son : tension ou longueur de la corde.....	98
Le monocorde des Pythagoriciens : un instrument de mesure.....	100
La division de l'octave des Pythagoriciens : la théorie harmonique.....	101
Production des sons sur une corde tendue par la méthode des harmoniques.....	101
La révolution harmonique de l'octocorde.....	103
La mesure des intervalles sur le monocorde	106
L'évolution du vocabulaire des intervalles musicaux.....	110
Rapports, proportions, médiétés	111
La médiété pythagoricienne 6, 8, 9, 12.....	113
De l'impossibilité de partager de façon égale une octave ou une quarte	114
L'harmonie, un outil mathématique.....	115
Les apports réels des Pythagoriciens : la mesure des intervalles et les rapports	116
Le mythe de Pythagore acousticien	117
Les mathématiciens au service des musiciens : après Pythagore.....	118
L'assemblage des tétracordes : la construction de l'échelle harmonique grecque	119
Mathématiciens et musiciens	120
Philolaos et l'octocorde pythagoricien	123
Archytas de Tarente et la division du tétracorde.....	127
Archytas et la tierce juste.....	131
Platon, successeur des Pythagoriciens : la gamme diatonique du <i>Timée</i>	134
Le diton dissonant : la fausse tierce de Platon.....	136
Aristoxène de Tarente	140
Annexes.....	142
Les systèmes d'intervalles divisant la quarte dans l'Antiquité.....	142
Intervalles et rapports numériques.....	146
Quelques systèmes de division du tétracorde.....	149
Les Tétracordes de l'Antiquité.....	150
Nomenclature des rapports des intervalles musicaux	154
Bibliographie	162
Sources primaires et commentaires	162
Sources secondaires.....	163

Chapitre 1

Les instruments de musique en Grèce ancienne

Introduction sur les instruments de musique

Il existe plusieurs classifications des instruments de musique, la plus conventionnelle étant celle qu'on enseigne généralement dans les cours de musique : c'est la classification des instruments de l'orchestre classique. On y recense les cordes, les vents, et les percussions. Les cordes sont frottées (instruments du quatuor, famille des violons) ou pincées (harpes, cithares, luths, lyres, guitares, clavecins). Les vents sont des bois (flûtes, clarinettes, hautbois, basson, saxophones) ou des cuivres (trompettes, trombones, tuba, clairon, cors). Les percussions sont harmoniques (vibraphones, cloches tubulaires, timbales) ou inharmoniques (cymbales, tambours, grosse caisse, triangle). Les pianos sont une classe à part puisqu'ils sont à la fois de la famille des cordes et des percussions, et les orgues se rattachent à plusieurs familles de vents.

Toutefois cette classification est maintenant dépassée et on emploie de nos jours la classification de C. Sachs et E. Hornbostel (1914) avec des modifications qui tiennent compte des évolutions de la connaissance, notamment en ethnomusicologie.

La classification de Hornbostel-Sachs comprend quatre classes : les idiophones, les membranophones, les cordophones, les aérophones. Les deux premières rassemblent principalement des instruments à percussion en usage dans des cultures non occidentales. Les instruments électriques et électroniques sont d'apparition récente (fin du XIX^{ème} siècle), on a donc ajouté une cinquième classe en 1940, les électrophones. Nous nous intéressons ici aux cordophones et aux aérophones.

Les cordophones en usage dans l'Antiquité sont du type composite : le cadre supportant les cordes et le résonateur sont assemblés et ne peuvent pas être séparés. Ils font partie de la sous-classe des luths, sans manche (lyre, kithara) ou avec manche (pandoura) ; leurs cordes sont de longueurs égales. D'autres font partie de la sous-classe des harpes ouvertes (sambukè) dont les cordes sont inégales. Ils sont tous à cordes pincées, avec les doigts ou avec un plectre.

Les aérophones ou instruments à vent forment trois sous-classes : les instruments à biseau ou à anche et les trompettes. Il existe trois familles d'instruments à vent en Grèce ancienne : les flûtes, ou syrinx ; les auloi (pluriel de « aulos »), sortes de hautbois ; et les salpinx correspondants à nos cuivres. Les syrinx sont des instruments à biseau : le jet d'air est projeté sur un biseau sans conduit. L'aulos fait partie des instruments à anche double, à trous et à perce cylindrique. La salpinx se range dans la sous-classe des trompettes, caractérisée par une embouchure qui permet aux lèvres de vibrer en insufflant l'air dans le tube. La salpinx ou trompette tyrrhénienne est une trompette naturelle sans dispositif de réglage de la hauteur de son autre que la production d'harmoniques, à l'instar du cor ou du clairon moderne.

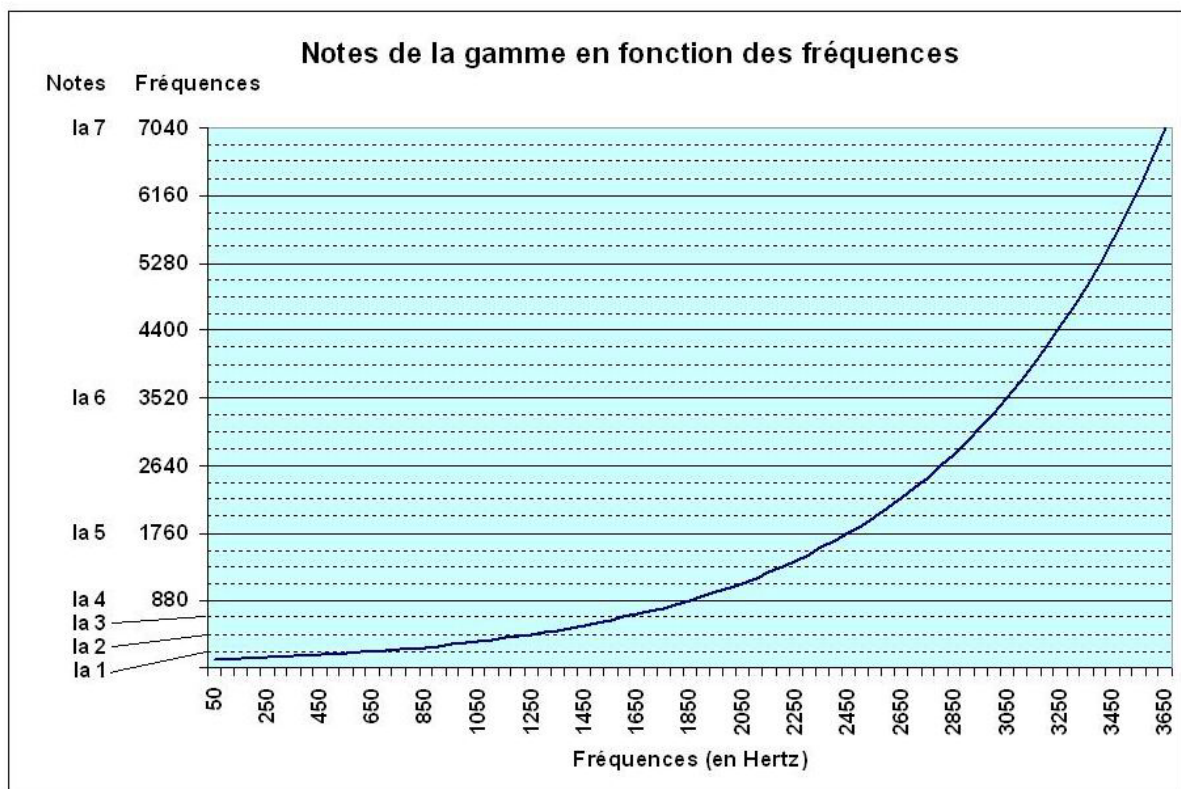
Éléments d'acoustique

Avant d'étudier un à un les différents instruments en usage dans la Grèce antique, une présentation de quelques éléments d'acoustique est nécessaire, en particulier pour les instruments à vent dont le fonctionnement est d'une approche moins intuitive que celui des cordes. Cette présentation fait appel à peu de notions mathématiques pour ne pas alourdir cette étude, alors qu'en toute rigueur, l'acoustique est une science complexe qui fait appel à des notions mathématiques d'un niveau élevé, comme les équations différentielles aux dérivées partielles. Ici, nous tenterons de présenter le son d'une façon plus intuitive, faisant notamment appel à la notion de pression de l'air et à ses variations, sur laquelle l'étude du son se fonde.

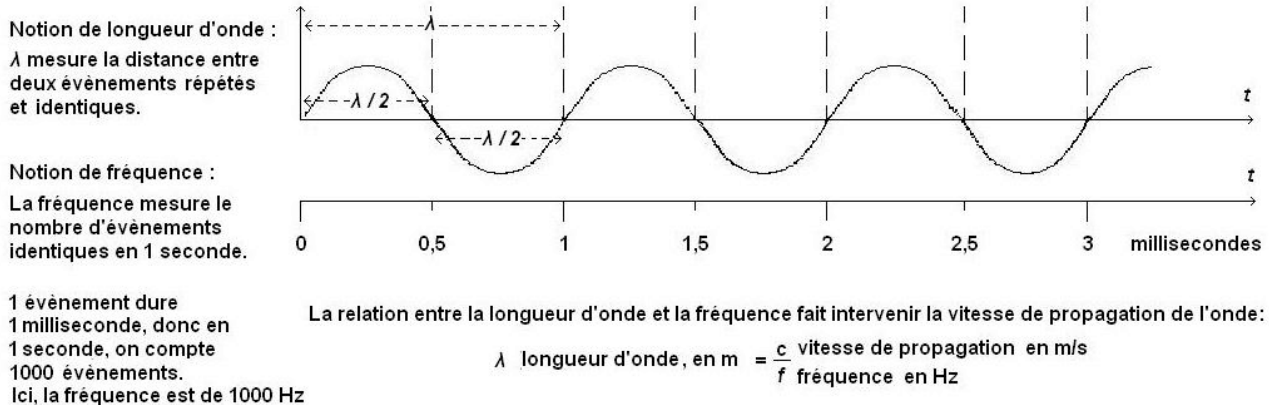
Les trois grandeurs du son : hauteur, intensité, timbre

La hauteur du son : fréquence et longueur d'onde

Trois paramètres caractérisent le son : la hauteur, l'intensité et le timbre. La hauteur est définie par une grandeur mesurable, la fréquence des vibrations mesurée en hertz (Hz), ou nombre de vibrations par seconde. La loi fondamentale de l'acoustique musicale se résume par l'expression « chaque octave plus aiguë double la fréquence ». L'échelle n'est donc pas linéaire. Par exemple, le la₃ est à 440Hz et le la₄ à 880 Hz.



La hauteur du son, comme tous les phénomènes périodiques, peuvent également s'évaluer grâce à une autre grandeur, la longueur d'onde. Il s'agit de la distance comprise entre deux composantes de la vibration : par exemple, si le phénomène périodique est constitué d'une succession de creux et de bosses qui se répètent dans le temps, la longueur d'onde est la distance entre deux bosses.



Trouver la longueur d'onde :

$$\begin{array}{l} c = \text{vitesse du son} = 343 \text{ m/s} \\ f = \text{fréquence} = 1000 \text{ Hz} \end{array} \quad \left| \rightarrow \lambda = \frac{c}{f} \rightarrow \lambda = \frac{343}{1000} = 0,343 \text{ m} = 34,3 \text{ cm} \right.$$

Relation entre la longueur d'onde et la fréquence

Les deux unités de mesure, longueur d'onde et fréquence, sont employées en acoustique musicale. En particulier, la notion de longueur d'onde intervient dans les dimensions des instruments.

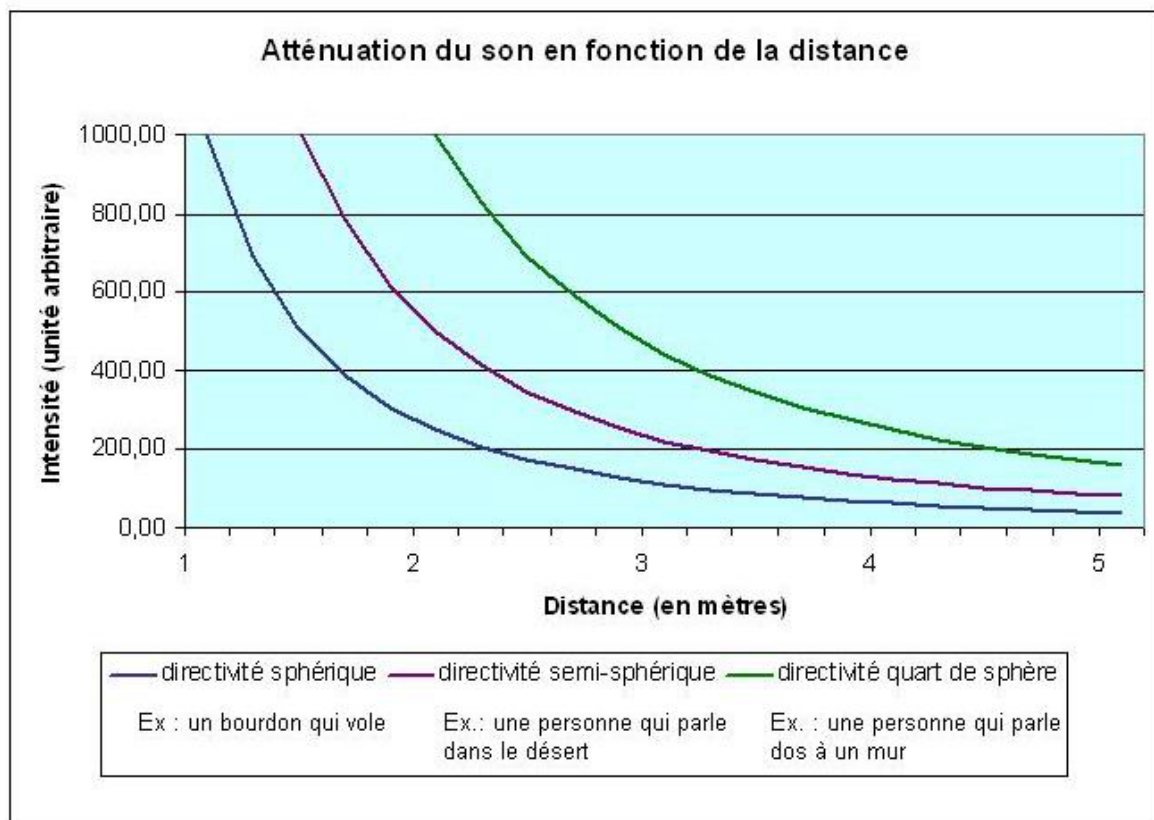
Un son grave est caractérisé par une fréquence basse (entre 60 et 200 Hz) et une longueur d'onde longue (5,7 m pour 60 Hz et 1,7 m pour 200 Hz) ; inversement, les sons aigus ont une fréquence élevée (4000 à 8000 Hz) et une longueur d'onde courte (8,5 cm pour 4000 Hz et 4,3 cm pour 8000 Hz).

L'intensité du son

On ne mesure pas facilement l'intensité sonore et son échelle est délicate : les décibels correspondent à un rapport de deux niveaux et son échelle est logarithmique. On peut en avoir une approche intuitive, en usage pendant des siècles, en mesurant la distance d'audibilité minimale d'un son. L'intensité sonore décroît rapidement dans l'air : elle est inversement proportionnelle au carré de la distance. En effet, le son est la propagation d'une variation de pression de l'air ; l'intensité du son est une fonction directe de la pression et dépend des variations de la force appliquée par le corps sonore sur une surface d'air. On peut, en première approximation, appliquer à l'intensité sonore la loi de la pression : $P = F/s$ (avec P la pression, F la force et s la surface).

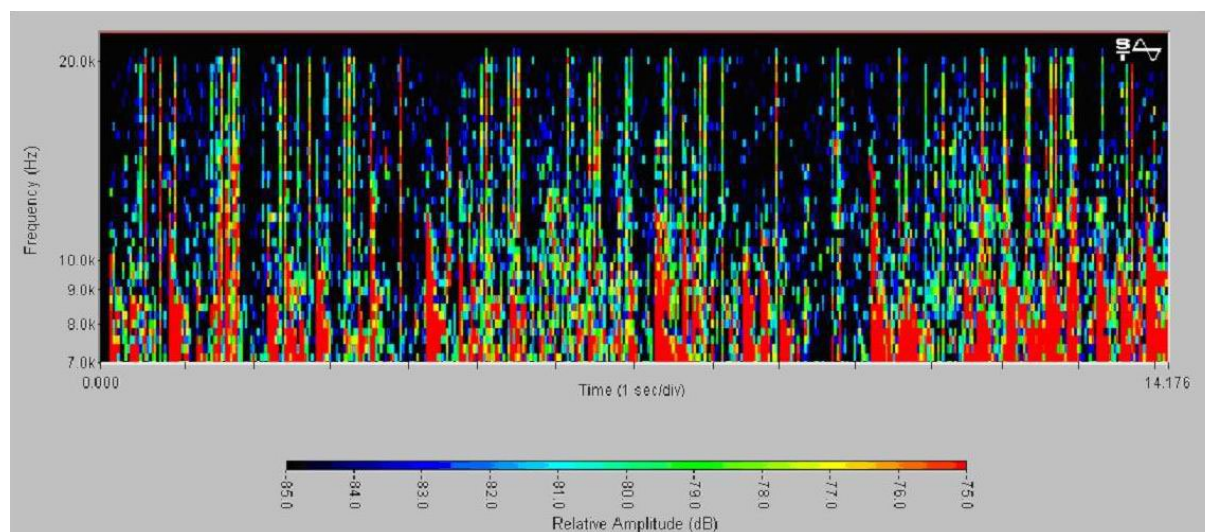
On considère que la propagation du son s'étend dans l'espace selon une sphère dont le rayon croît régulièrement. La formule de calcul de la surface d'une sphère est :

$s = 4\pi R^2$. L'intensité sonore est inversement proportionnelle au carré de la distance si l'espace considéré est une sphère, par exemple, un insecte en vol, ou un avion. Lorsqu'on est au sol, la surface est une demi-sphère, l'atténuation est deux fois moindre ; lorsqu'on parle dos à un mur, l'atténuation est quatre fois moindre, autrement dit, le son audible se propage plus loin, puisque la surface recevant la pression acoustique est plus faible. Si un bruit se fait entendre dans une rue étroite, il se propage encore plus loin, car les murs limitent la surface de propagation de la pression sonore. Le cas limite est la propagation d'un son dans un tube, car la surface de propagation est constante avec la distance : le son ne devrait pas s'atténuer, mais sa propagation est entravée par les frottements ; par ailleurs un effet de filtre est fortement présent. Ce dispositif était utilisé dans les système de communications de la voix dans les immeubles au XIXème siècle, ainsi que dans les navires.



Le timbre ou couleur du son

Le troisième paramètre qui caractérise le son est le timbre ou la « couleur » du son. C'est une grandeur difficilement quantifiable, elle correspond, physiquement, à la quantité et à l'intensité des différents harmoniques qui sont présent dans un son. Le timbre est un paramètre qui évolue dans la durée. On représente le timbre sur des spectrogrammes qui restituent trois grandeurs : les fréquences, les intensités et le temps. Généralement les fréquences sont en ordonnées, le temps en abscisse et l'intensité est exprimée sur une échelle de couleurs.



D'autres paramètres caractérisent le son et sa propagation. Le temps a une grande importance dans le paradigme sonore : le déroulement du son est une fonction du temps, sa vitesse de propagation également, et tout ce que recouvre la notion d'enveloppe, c'est à dire l'évolution des différentes grandeurs dans le temps. Un instant est notamment déterminant, c'est l'attaque du son, dont les lois physiques, qui concernent les phénomènes transitoires, sont moins conventionnelles que celles d'un son stable.

Excitateurs et résonateurs dans les instruments de musique

La fonction d'un instrument de musique est de produire des sons sous le contrôle par l'instrumentiste de la hauteur, de l'intensité, et du timbre, ainsi que de l'évolution de ces paramètres dans le temps.

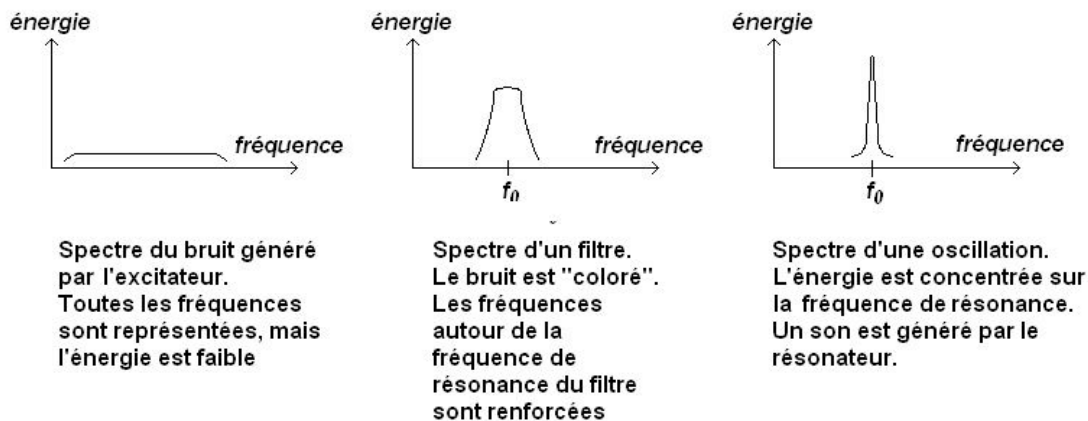
Dans cette étude, on s'intéresse à la production des sons et à leur hauteur, c'est à dire à la fréquence.

L'organologie identifie deux éléments dans un instrument de musique : l'excitateur et le résonateur. L'excitateur est le dispositif qui provoque l'apparition de vibrations, le résonateur est celui qui accroît l'intensité des vibrations et les communique à l'air ambiant.

L'excitateur comporte un dispositif, parfois complexe, qui permet l'accouplement au résonateur. Les mécanismes qui permettent à l'instrumentiste de choisir la hauteur de son (la fréquence de la vibration) sont divers et se placent soit dans l'excitateur qu'on appelle alors vibreur (cordophones), soit dans le résonateur (flûtes, hautbois), soit par la multiplication des générateurs de son (flûte de Pan, orgues).

On rencontre trois types de résonateurs. Le résonateur est qualifié de « large bande » lorsqu'il est en charge d'une grande partie des sons produits, c'est alors une caisse de résonance. Ou alors il est chargé de renforcer un seul son à une fréquence propre précise, on parle de « résonateur accordé » ; c'est le cas pour certains instruments à percussion (timbales, tubes sous les lames des vibraphones), mais également pour la cavité

buccale avec la voix. On nomme ces résonateurs accordés des filtres passe-bande car ils sont chargés de renforcer une bande étroite de fréquences. D'une façon générale, le résonateur est un filtre : c'est à dire qu'il concentre l'énergie fournie par l'excitateur sur une bande plus ou moins large du spectre de fréquences. Plus la bande est étroite, plus l'énergie est importante dans cette bande. Lorsque la bande est étroite au point de ne concerner qu'une fréquence, l'énergie est maximale et le résonateur de ce troisième type entre en oscillation, c'est à dire qu'il génère un son (flûtes, hautbois, trompettes).



Bruit du souffle à faible énergie - Bruit "coloré" - Oscillation à énergie intense

Exemple : on souffle bouche ouverte, le souffle est faible, le bruit peu intense. En refermant progressivement les lèvres, le souffle prend de la vitesse, le bruit devient plus fort et il prend une certaine "couleur". Lorsque l'air est propulsé à grande vitesse par une petite ouverture, un sifflement se produit.

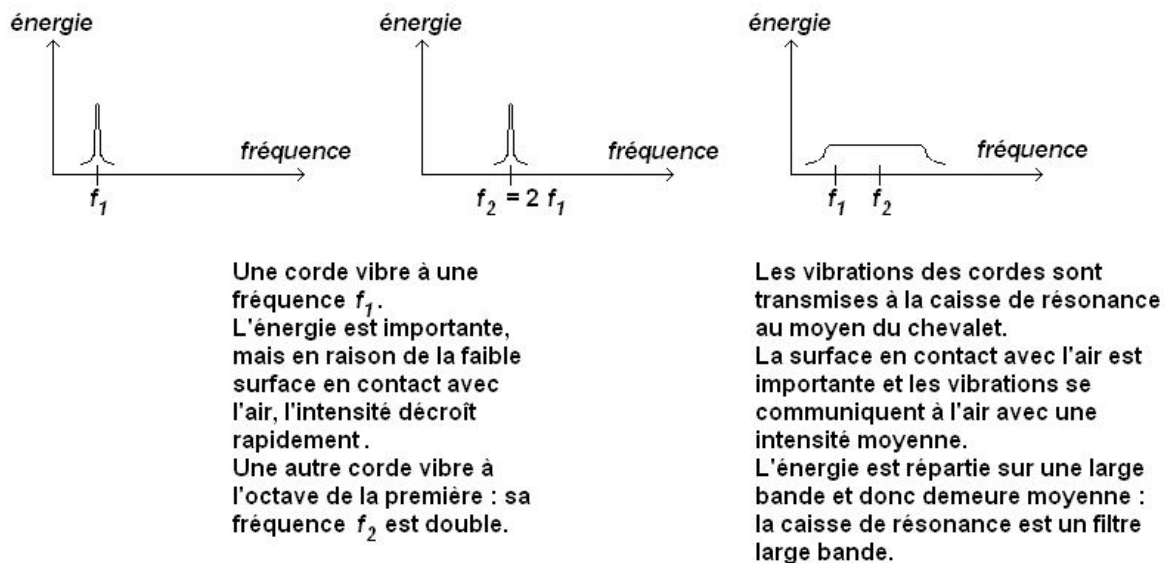
Cas d'un instrument à vent (flûte, voix)

Le résonateur peut donc devenir un oscillateur, c'est le cas de la plupart des instruments à vent, qu'ils soient à biseau, à anche ou à embouchure.

Dans le cas des instruments à cordes, c'est un peu différent. L'oscillation est produite par l'excitateur, c'est la vibration de la corde. L'excitateur est un oscillateur. L'intensité de cette vibration est sensible au voisinage immédiat de la corde, mais elle décroît très rapidement et l'énergie ne peut pas se communiquer efficacement à l'air ambiant, en raison de la faible surface de contact entre la corde et l'air. On a recours à un dispositif qui permet de transmettre l'énergie de la vibration à une table d'harmonie puis à une caisse de résonance. A proximité d'une de ses fixations, la corde est tendue sur un support, le chevalet, petite pièce en bois qui surélève la corde tout en étant en contact parfait avec la surface de la table d'harmonie qui constitue une des parois de la caisse. La caisse de résonance a une double fonction : renforcer l'intensité du son et communiquer l'énergie sonore à l'air extérieur.

Le renforcement du son se réalise par un effet de démultiplication : les vibrations provenant du chevalet sont transmises à l'ensemble de la table d'harmonie qui les communique à l'air intérieur. Le volume intérieur se comporte comme un filtre à large bande en renforçant les sons dont les fréquences sont comprises dans la bande. Comme les caractéristiques de réponse d'un filtre acoustique sont liées aux dimensions du volume, un instrument en charge des fréquences basses (dont la longueur d'onde est grande, de l'ordre du mètre) comme le violoncelle est plus grand qu'un violon. La forme du volume et les matériaux qui le composent interviennent également dans le renforcement du son à certaines fréquences. Par ailleurs, la table d'harmonie possède ses propres modes de vibrations et agit comme un filtre, et elle subit en retour les vibrations de la caisse de résonance qui a également ses modes propres de vibrations. La diffusion du son à l'air extérieur opère aux surfaces et aux ouvertures qui constituent également un filtre et modifient sensiblement le timbre de l'instrument. Toutes ces influences réciproques sont délicates à modéliser : la pratique du luthier – son savoir empirique issu d'une longue tradition – est souvent préférée aux équations différentielles pourtant indispensables pour comprendre et représenter ces phénomènes complexes.

Comme le volume est un filtre à large bande, le renforcement des sons s'effectue sur une bande de fréquences large, au détriment de l'énergie fournie.



Cas des instruments à cordes

L'oscillation est produite par l'excitateur : la corde vibrante.
L'énergie de la vibration est transmise à la caisse de résonance par le chevalet.

Les filtres acoustiques ont été décrits et étudiés par Hermann Helmholtz au milieu du XIX^{ème} siècle dans un ouvrage essentiel pour comprendre l'acoustique des

instruments de musique, la *Théorie physiologique de la musique*¹. Ses expériences sur les résonateurs accordés sphériques ont fait considérablement avancer la connaissance en acoustique. On lui doit la vérification expérimentale de la théorie des harmoniques qui avait été formulée au siècle précédent par d'Alembert².

Cette notion de filtre acoustique est à l'origine de la conception empirique des célèbres vases acoustiques accordés qui, semble-t-il, équipaient les théâtres grecs dans l'Antiquité. Malheureusement nous ne possédons que très peu d'informations sur ces dispositifs, en dehors du livre V du *Traité d'Architecture* de Vitruve, écrit au I^{er} siècle, et d'une allusion dans la section XI des *Problèmes* dits d'Aristote qui datent du III^{ème} siècle av. J.-C. Dans certaines églises construites au Moyen Âge des cavités ont été aménagées dans les murs, semble-t-il dans ce même but de renforcer certaines fréquences, et d'en atténuer d'autres afin de diminuer le temps de réverbération, toutefois l'efficacité de ces installations est faible³.

Généralités sur les instruments à vent

Si les processus qui interviennent dans les instruments à cordes sont souvent compris de façon intuitive, il n'en est pas de même pour les instruments à vent. On a vu que dans ces instruments, le son est généré par une colonne d'air qui entre en oscillation à la suite d'un ébranlement produit par l'excitateur. La notion d'ébranlement est importante : si l'excitateur propulse avec force une grande quantité d'air dans un tube, il se produira un déplacement d'air mais pas de son. Le rôle de l'excitateur est de mettre en vibration la colonne d'air, soit par un jet d'air fin et rapide obtenu par un biseau, soit par un élément mécanique vibrant situé dans la bouche, soit par les lèvres appliquées sur une embouchure qui vibrent sous un souffle puissant. Avant d'étudier ces trois types d'instruments, il convient de comprendre comment une colonne d'air entre en vibration.

La propagation d'une compression dans un tube fermé

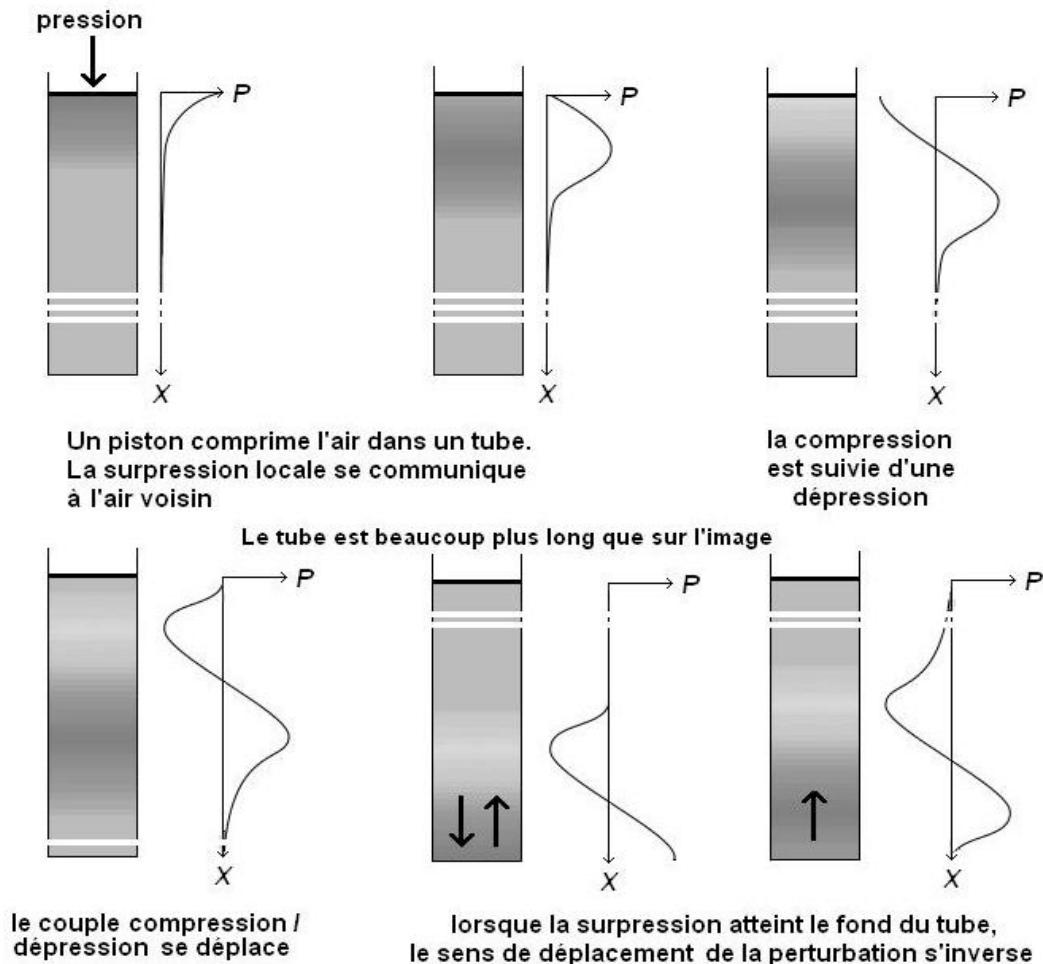
Lorsqu'on applique un piston à l'entrée d'un tube fermé à l'autre extrémité par un opercule, on comprime l'air à proximité. Cette compression se communique à la portion d'air immédiatement voisine, en créant une dépression derrière.

¹ Hermann Helmholtz, *Die Lehre von den Tonempfindungen als physiologische Grundlage für die Theorie der Musik*, Vieweg, Brunswick, 1863. Traduit de l'allemand par M. G. Gueroult : *Théorie physiologique de la musique fondée sur l'étude des sensations auditives*, Masson, Paris, 1868, - réédition J. Gabay, Paris, 1990.

² L'expression de l'équation d'onde est un des résultats de la riche controverse qui s'est déroulée dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin* entre 1749 et 1752 avec les articles sur les « cordes vibrantes » de Jean le Rond d'Alembert, de Leonhardt Euler et Daniel Bernoulli.

³ Voir à ce sujet le travail approfondi de l'équipe d'archéologues du CESCUM (Centre d'études supérieures de civilisation médiévale) de l'Université de Poitiers en liaison avec des acousticiens sous la direction de Bénédicte Palazzo-Bertholon et de Jean-Christophe Valière : *Archéologie du son, Les dispositifs de pots acoustiques dans les édifices anciens*, Société Française d'Archéologie, Paris, 2012.

Du fait de l'élasticité de l'air, cette dépression attire une partie de l'air qui vient d'être comprimé qui revient à sa position d'origine, tandis que l'autre partie comprime la portion d'air voisine en répétant le processus : la perturbation de pression se déplace le long du tube.



Propagation et réflexion d'une onde de pression dans un tube

La perturbation de pression se déplace le long du tube jusqu'à rencontrer l'opercule situé à l'autre extrémité. Cet obstacle comprime à nouveau l'air en inversant le sens de propagation de la perturbation. Le processus perdure en s'affaiblissant à cause des frottements, et retrouve son équilibre après quelques oscillations. Tout ceci dure moins d'un dixième de seconde. On peut déclencher l'opération inverse en tirant le piston, tout est identique sauf les compressions qui deviennent dépressions et réciproquement.

La mise en vibration d'une colonne d'air : l'onde stationnaire

Le principe des instruments à vent est de mettre en vibration la colonne d'air en profitant de son élasticité. En projetant un jet d'air fin et rapide sur la surface de la colonne d'air, on met en pression l'air pendant un court instant (de l'ordre de quelques millièmes

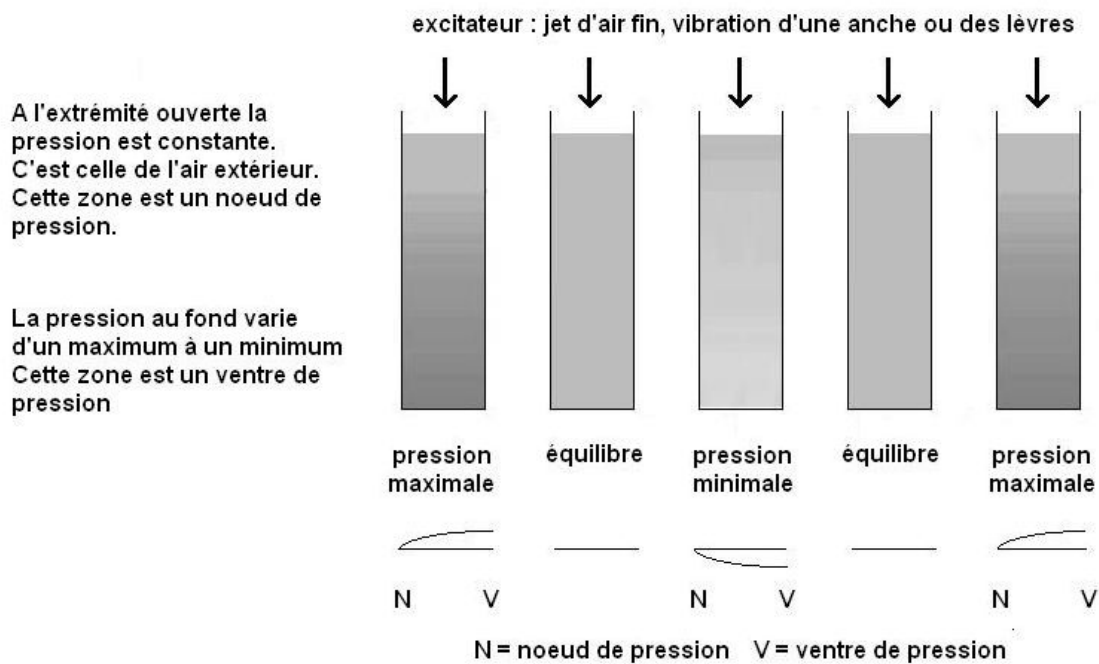
de seconde), phénomène immédiatement suivi d'une dépression d'amplitude équivalente, du fait de l'élasticité de l'air.

Celle-ci revient à sa position initiale et reçoit à nouveau la pression du jet d'air. Le processus se renouvelle tant que le jet est présent. La perturbation de pression aller rencontre la perturbation retour en provoquant successivement des affaiblissements et des renforcements de pression, jusqu'à trouver un état stable dans lequel les pressions et les dépressions s'équilibrent. Cet état transitoire dure de l'ordre d'un dixième de seconde. L'état d'équilibre ainsi établi est appelé une onde stationnaire à l'origine de la production d'un son. Dans cet état stable, la zone en contact avec l'air extérieur a la même pression que cet air, et le fond du tube est la zone où les pressions et les dépressions sont le plus intenses. On appelle cette zone un ventre de pression, et la zone où la pression est celle de l'air extérieur un noeud. Concernant la vitesse locale des parties d'air dans ses petits mouvement alternatifs, c'est l'inverse : à l'extrémité fermée du tube la vitesse est nulle à cause de l'obstacle, tandis qu'à l'entrée du tube elle est maximale tant dans un sens que dans l'autre du fait de l'attraction que présente l'état stable de la pression extérieure dans le sens retour et la force du jet d'air dans le sens aller. Cette description concerne un tube ouvert à une extrémité et fermé à l'autre. La longueur de l'onde stationnaire produite est le quart de la longueur d'onde du son produit.

La colonne d'air est ainsi mise en vibration de pression, l'oscillation produite par l'onde stationnaire est stabilisée, un son est produit qui est émis par l'ouverture et par les parois du tube. Il est important de noter que l'air ne se déplace pas ; les parties qui le composent se déplacent autour de leur position de repos lors des compressions et dépressions successives, et ce déplacement est imperceptible, de l'ordre de quelques microns. C'est la perturbation qui se déplace.

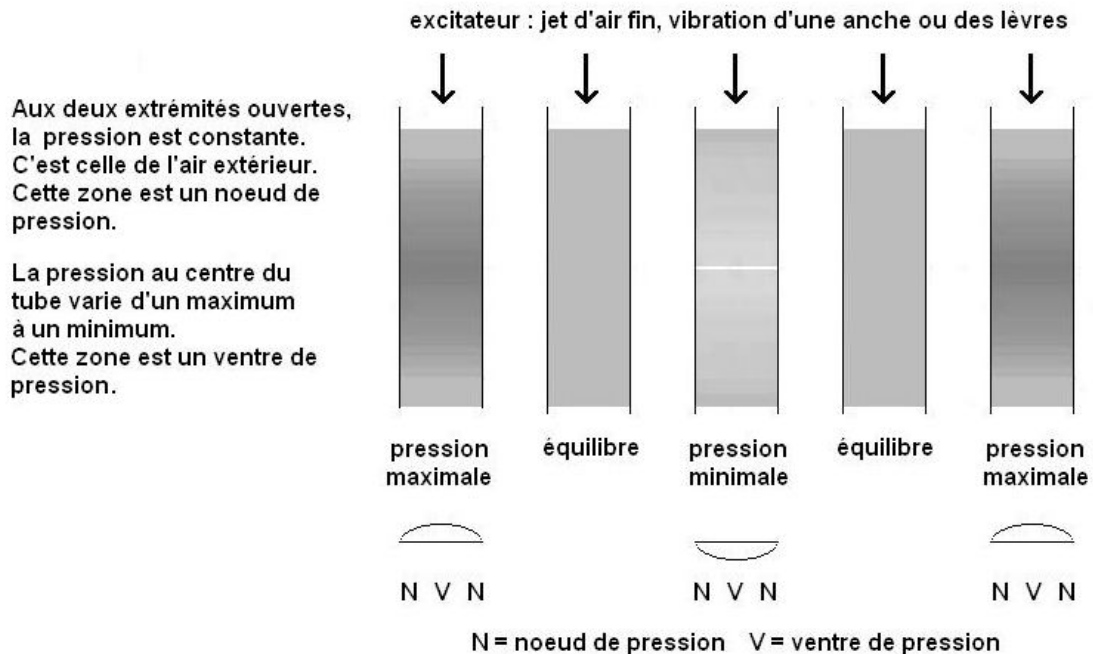
La fréquence de la vibration dépend de la durée de propagation de la perturbation de pression de l'air le long du tube et de son retour. Cette durée est liée à la longueur du tube (qui détermine la longueur d'onde) et à la vitesse de propagation de la perturbation. Or, on sait, depuis Newton, que le déplacement d'une perturbation de pression, ou d'une onde de pression, se fait à une vitesse constante, qui ne dépend ni de la fréquence ni de l'intensité ni de la distance parcourue par l'onde de pression⁴. Plus tard, on observera que cette vitesse, qui se trouve être la vitesse du son, ne dépend que de la température, ce qui représente d'ailleurs un réel obstacle à la justesse des flûtes. La fréquence de vibration d'une colonne d'air mise en excitation est donc une fonction directe de la longueur du tube à une température donnée.

⁴Isaac Newton, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, Londres, 1687. Trad. Madame du Chatelet, *Principes mathématiques de la philosophie naturelle*, Paris, 1759, tome I prop. XLI à L.



Etablissement d'une onde stationnaire dans un tube fermé

Cette description du processus de génération d'une onde stationnaire se place dans le cas d'un tube fermé à une extrémité.



Etablissement d'une onde stationnaire dans un tube ouvert aux deux extrémités

La fréquence de l'oscillation est double de celle d'un tube fermé

Lorsque le tube est ouvert aux deux extrémités, le phénomène est différent et affecte la longueur d'onde et donc la fréquence de vibration qui alors est double de celle d'un tube fermé. En effet, dans ce cas, les deux extrémités sont en contact avec l'air extérieur, et

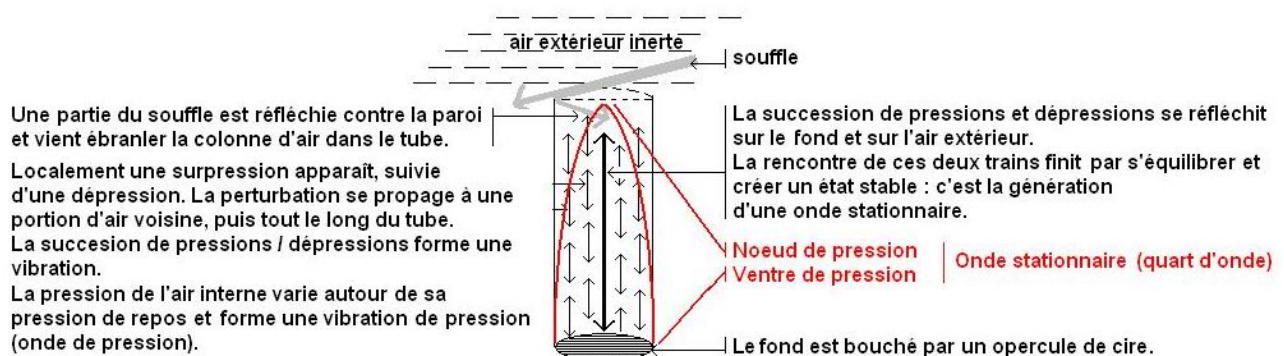
lors de la génération de l'onde stationnaire, on observe deux nœuds de pression aux extrémités qui correspondent à la pression de l'air extérieur. Le ventre de pression se situe alors au centre du tube et on est en présence d'une oscillation dont la longueur est une demi longueur d'onde au lieu d'un quart pour un tube fermé (donc la fréquence est double).

Les excitateurs biseaux : les flûtes

Le principe des flûtes est basé sur l'effet de biseau qui permet d'obtenir un jet fin et rapide. La force d'un souffle d'air peut être décrite comme une combinaison de deux grandeurs dépendant du temps qui croissent en même temps que la force : la quantité d'air et la distance de projection, c'est à dire le débit et la vitesse du flux d'air qui sont des fonction du temps.

Pour produire un son, l'excitateur doit ébranler l'air contenu dans le tube, la colonne d'air, sans l'expulser du tube. Pour cela il faut que la force du flux soit la combinaison d'un faible débit associé à une grande vitesse. On sait empiriquement comment procéder, il faut rétrécir l'ouverture de la bouche jusqu'au moment où le flux est très fin et à grande vitesse. Si on souffle bouche ouverte, l'air est propulsé à une vitesse peu importante. Plus on referme les lèvres, plus la vitesse croît, à force constante.

Sur les flûtes de Pan ou syrinx, le souffle heurte le biseau du bord du tube et forme un excitateur qui permet à une petite quantité d'air propulsé avec énergie de pénétrer dans le tube. L'angle entre la paroi et le flux d'air est déterminant : si trop d'air entre dans le tube, il ressort sans provoquer d'oscillation ; il faut donc trouver un équilibre, par l'ajustement du souffle sur le biseau et de la sortie d'air qui lui est associée.



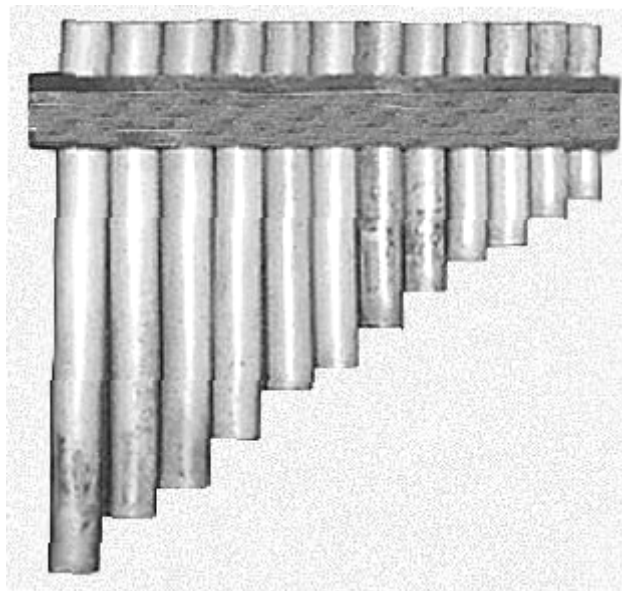
Dans une onde de pression, l'air ne se déplace pas ; c'est la perturbation de l'air qui se déplace du haut en bas et retour.
La fréquence de vibration dépend de la longueur du tube et de la vitesse de propagation de l'onde de pression.

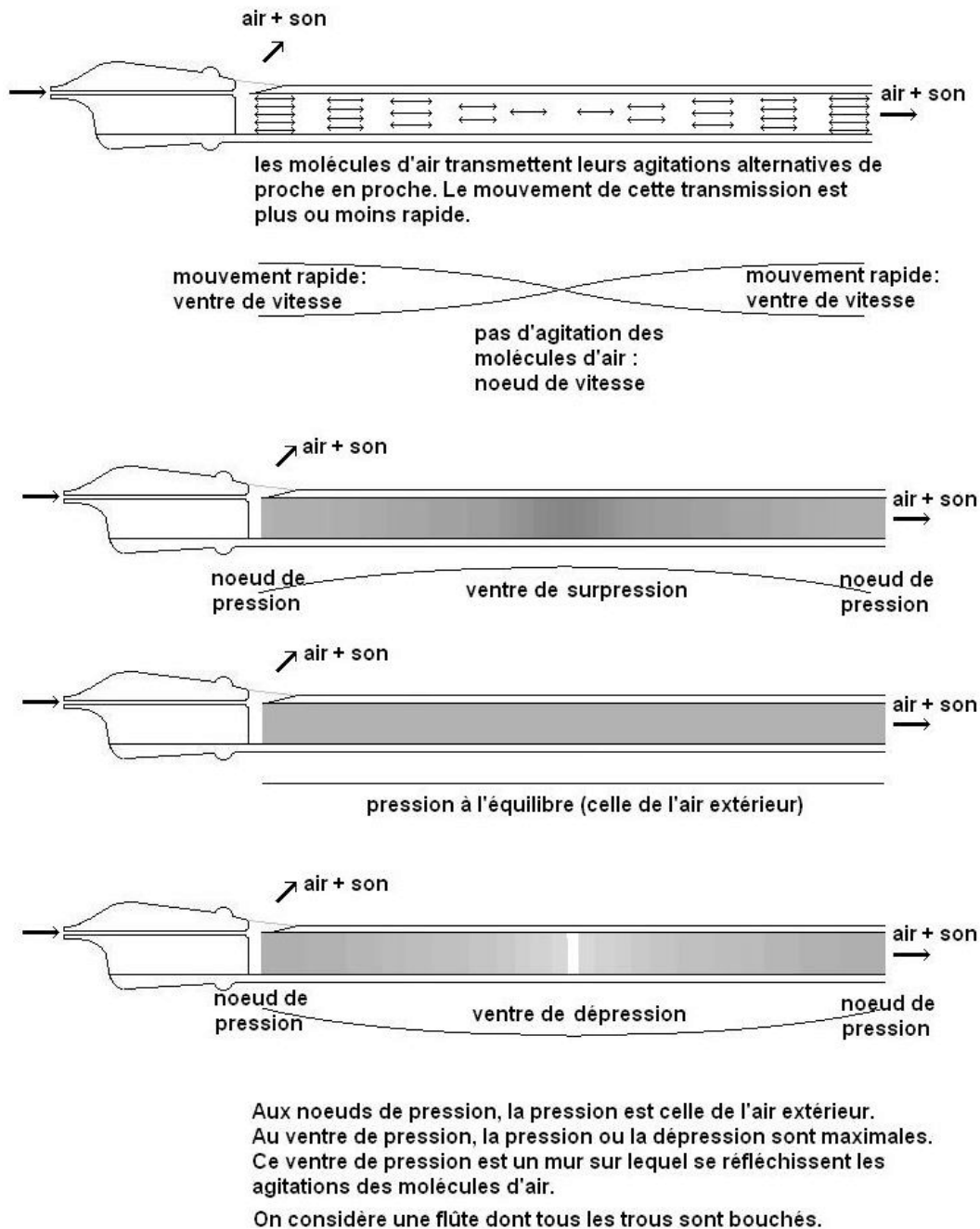
Processus de génération du son avec projection de l'air sur un biseau : flûte de Pan ou syrinx

La syrinx est composée de plusieurs tubes assemblés qui correspondent chacun à une hauteur de son. L'instrumentiste a la possibilité d'ajuster la hauteur vers le grave par une déformation des lèvres qui augmente la hauteur de la colonne d'air. L'intensité est liée à la force du souffle, puisque l'effet de biseau ne dépend que de l'angle. Le diamètre intervient sur le timbre et un peu sur la hauteur, et il ne doit pas être trop grand par rapport à la longueur sinon des vibrations transversales se produisent qui perturbent l'oscillation principale souhaitée.

La flûte dite de Pan est un instrument simple qui permet de jouer autant de notes qu'il y a de tubes. Dans la classification standard, ces instruments sont dits « sans conduit d'insufflation ». Les tubes sont généralement bouchés, mais ils peuvent être ouverts, la réflexion de l'air faisant alors sur l'air extérieur inerte. Dans le cas d'un tube ouvert, la fréquence est double de la fréquence d'un tube fermé. On trouve ce type de flûte notamment dans certaines régions de Chine.

C'est l'occasion d'aborder les oscillations dans les tubes ouverts. On a vu que dans ce cas, si l'air est ébranlé par un exciteur, il existe aux deux extrémités des nœuds de pression, celle-ci étant égale à celle de l'air extérieur, et un ventre au milieu du tube. Concernant la vitesse d'agitation des molécules d'air, agitation qui se communique par contact le long de la colonne d'air, c'est le contraire : les extrémités sont des ventres de vitesse.



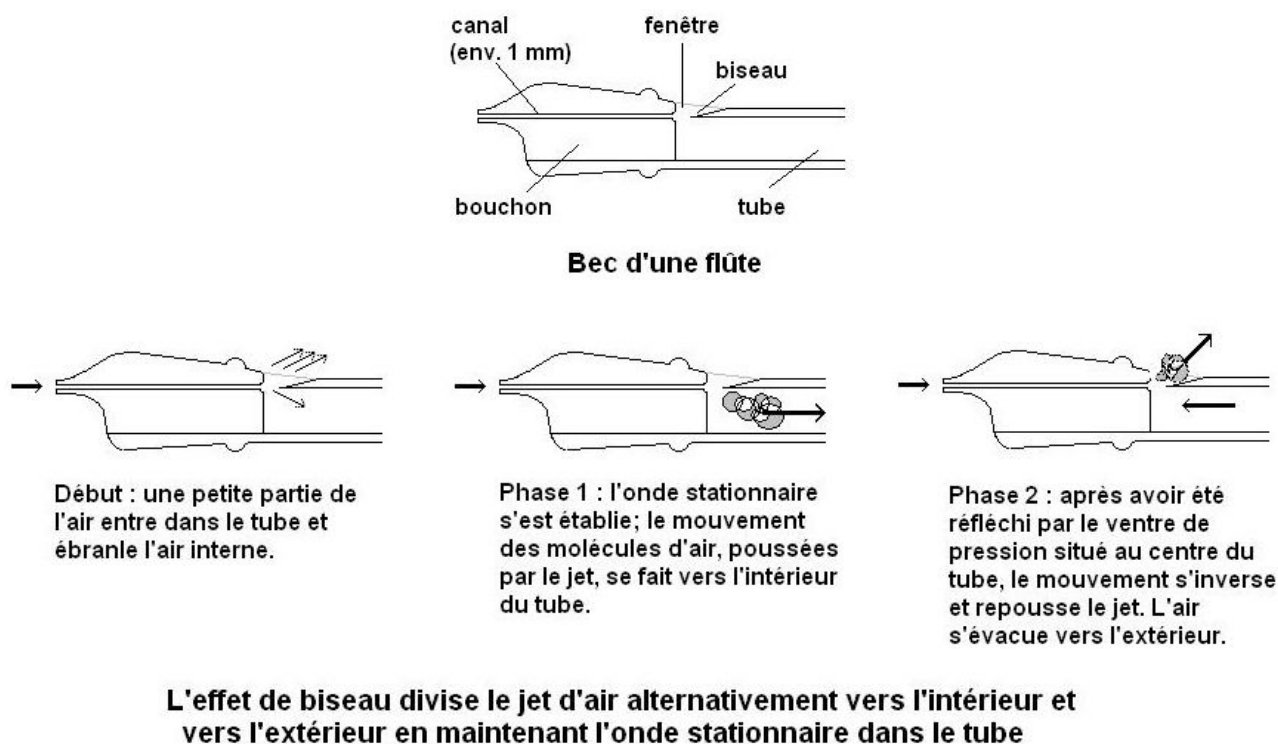


Onde stationnaire dans une flûte à bec : tube ouvert aux deux extrémités

L'excitateur projette un flux d'air fin à grande vitesse, ce qui provoque une agitation rapide des molécules de l'air immédiatement voisin. Lorsque, après un très court instant, une onde stationnaire s'établit dans le tube, la situation est celle-ci : dans le tube, il existe deux circulations opposées et de même intensité qui concernent l'agitation plus ou moins rapide des molécules d'air. Lors du trajet de retour, la circulation revient à l'origine, et elle est immédiatement refoulée par le jet d'air qu'elle rencontre. La réflexion à l'intérieur du tube s'effectue au milieu qui est donc un noeud de vitesse. Dans la seconde partie du tube, celle qui regarde vers l'extérieur, le phénomène inverse se produit : la seconde partie de

l'onde stationnaire s'établit en créant un ventre de vitesse à l'extrémité ouverte sur l'extérieur.

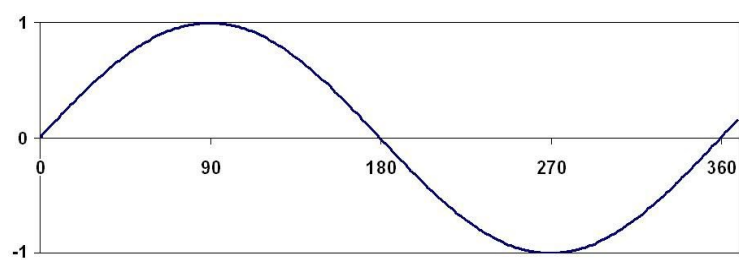
Le fonctionnement du biseau se base sur un conduit très fin, de l'ordre de 1 mm, et d'une fenêtre qui permet l'évacuation de l'air pendant les phases d'insufflation dans le tube.



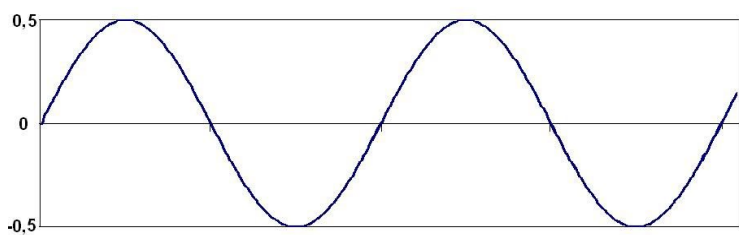
Comme sur un tube ouvert le ventre de pression est au milieu du tube, l'onde stationnaire est une demi-onde. Dans le cas d'un tube fermé à un bout, c'est un quart d'onde. On sait toutefois qu'un son n'est jamais pur (un son pur est une sinusoïde parfaite), il comprend toujours des harmoniques.

La représentation mathématique d'une onde se fait sur un graphe avec la pression en ordonnée et le temps en abscisse.

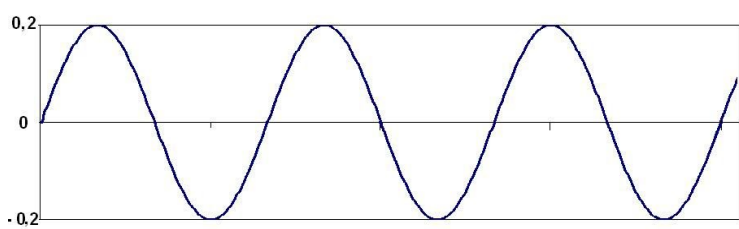
Comme tous les sons naturels, le son d'un instrument à vent est composé d'un son principal, appelé fondamental, dont la fréquence correspond au son entendu, et d'harmoniques dont les fréquences sont les multiples de la fréquence du fondamental. La présence de ces harmoniques confère le timbre aux instruments de musique et leur distribution évolue parfois dans le temps. Les harmoniques de rang pair sont les octaves du fondamental et procurent un son harmonieux. Les harmoniques de rang impair correspondent aux quintes, tierces, septième, etc. et confèrent un timbre plus riche, dont les caractéristiques dépendent de leur répartition et de leur dosage.



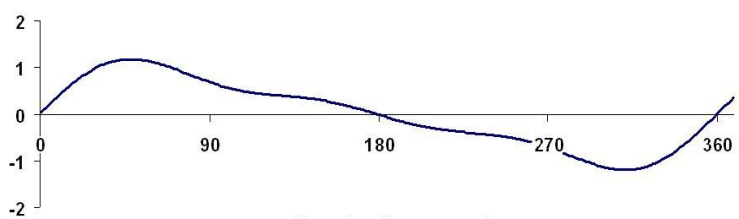
fondamental



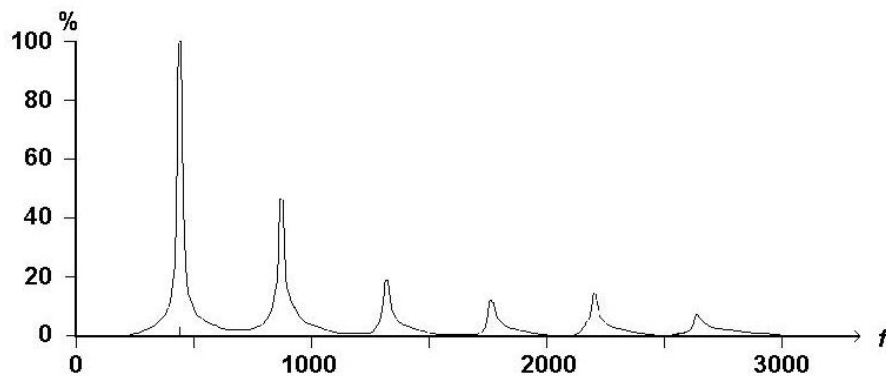
harmonique 2 : octave



harmonique 3 : double quinte



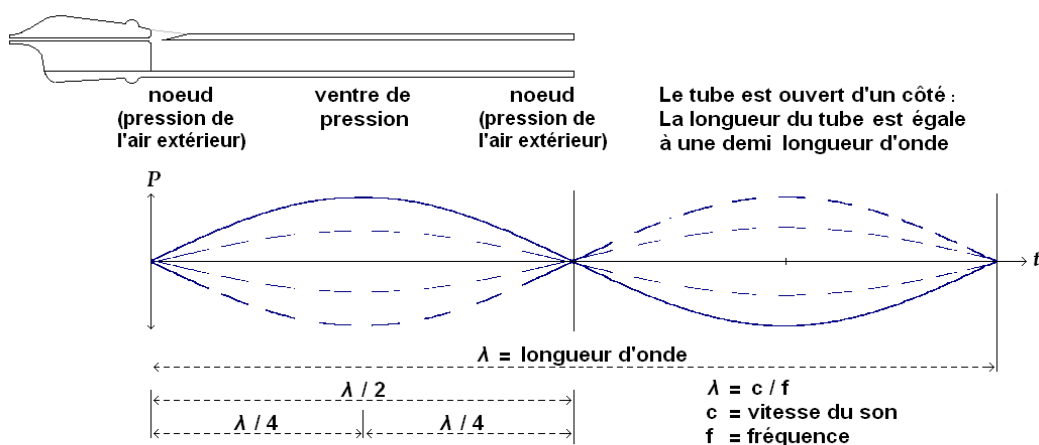
somme des trois premiers rangs



distribution des fréquences du son d'une flûte (la 3)

Cependant, ceci est théorique et, pour diverses raisons, la réalité diffère très légèrement du calcul. Il existe en effet plusieurs interactions aux transitions de milieux, (entre le bec et la colonne d'air, entre l'extrémité du tube et l'air extérieur), qui altèrent la simplicité de la théorie. Par ailleurs, la paroi interne du tube génère des frottements visqueux (air contre solide), et on observe également des échanges thermiques qui interviennent dans la linéarité de la justesse. Ces phénomènes nécessitent des adaptations pour conserver l'harmonicité de l'ensemble de l'instrument, comme l'ajustement du diamètre du tube vers l'extrémité et près du bec.

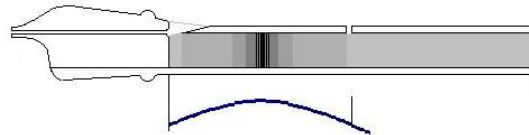
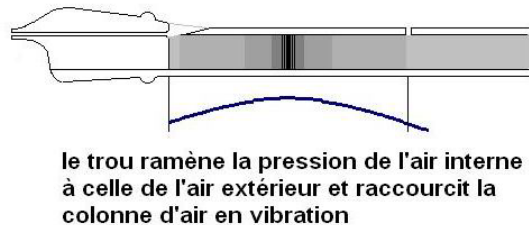
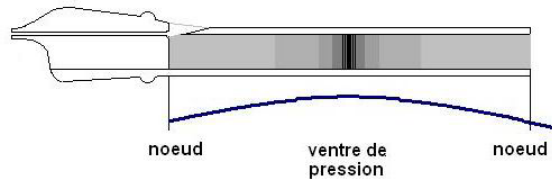
Dans les instruments à vent, la longueur de la colonne d'air détermine la fréquence de la vibration sonore. Il existe une relation entre la fréquence et ce qu'on nomme la longueur d'onde. Cette longueur d'onde est la distance entre deux perturbations de pression de l'air, lorsque un son se propage. La relation entre la fréquence et la longueur d'onde fait intervenir la vitesse du son : la fréquence est égale au rapport de cette vitesse du son sur la longueur d'onde, les deux étant exprimées dans la même unité, généralement en mètres (la vitesse du son est d'environ 343 m/s à une température de 20°).



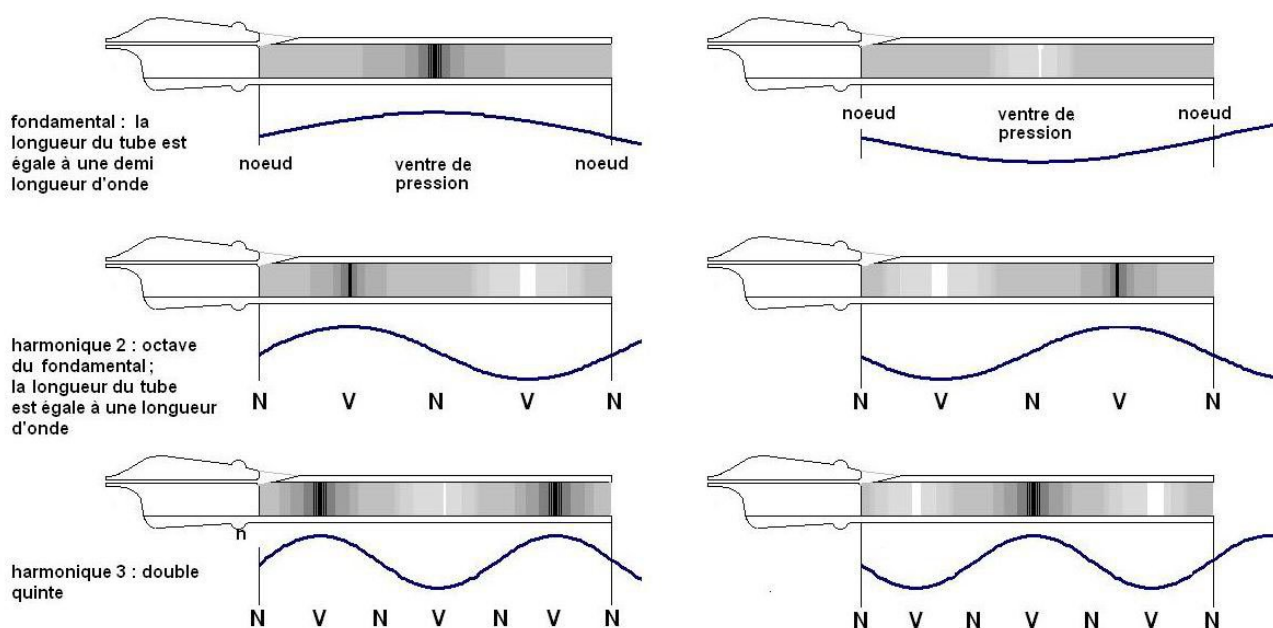
Courbe de pression en fonction du temps
Notion de longueur d'onde

Une flûte dont le tube est égal à 33 cm produit, lorsque tous les trous sont bouchés, une vibration de pression dont la longueur d'onde est de 66 cm. La fréquence est donc de $343 / 0,66 = 260 \text{ Hz}$ à 20° , soit un do grave.

La mise en place de plusieurs trous le long du tube permet de raccourcir la colonne d'air en créant, au niveau du trou ouvert, un nœud de pression, puisque l'air se trouve alors à la pression extérieure. La longueur d'onde diminue proportionnellement, et donc la fréquence.



On peut également créer des registres de jeu plus aigus en forçant la colonne d'air à se diviser en deux ou en trois fuseaux de pression qui correspondent aux harmoniques 2 et 3 de la fréquence fondamentale.



Ondes stationnaires des harmoniques

Les instruments à anche : clarinettes et hautbois

Sur les instruments à anche (par exemple la clarinette), le souffle fait vibrer une fine lamelle de roseau fixée à une extrémité et forme un excitateur beaucoup plus puissant que le simple souffle. L'anche est attachée sur le bec avec une ligature, et l'ensemble est introduit dans la bouche. Le souffle écarte l'anche de son support, et son élasticité la force à revenir à sa position de repos en frappant le support, ce qui prolonge le processus. Le tube est en communication avec le bec et la colonne d'air est ébranlée par la vibration de l'anche. Immédiatement une onde stationnaire se forme dans le tube ouvert à l'autre extrémité, et asservit la vibration de l'anche. L'anche est entièrement placée dans la bouche, et donc, à l'inverse de la flûte, les instruments à anche se comportent comme des tubes fermés à une extrémité, et donc le spectre du son produit contient surtout des harmoniques impairs, caractéristique de ce type d'instruments.

Sur les instruments de la famille des hautbois (basson, cor anglais, aulos), deux anches sont couplées et forment une anche double qui produit un son différent de l'anche simple. Les vibrations des deux parties de l'anche sont opposées et ne frappent pas contre le bec. L'anche est introduite dans la bouche et la vibration est communiquée à la colonne d'air contenue dans le tube.

Les instruments à embouchure : trompes, cors et trompettes

Les instruments à embouchure (trompes, cors, trompettes) n'ont pas d'excitateur proprement dit : les lèvres, appliquées sans écrasement sur le cône de l'embouchure, vibrent et génèrent la vibration transmise au tube. La puissance du souffle modifie la hauteur du son selon l'échelle des harmoniques. En prenant le do comme fondamental, la série suivante est la seule qui constitue la palette de l'instrumentiste :

harmoniques	1	2	3	4	5	6	7	8
notes	Do 1	Do 2	Sol 2	Do 3	Mi 3	Sol 3	Sib 3	Do 4

L'instrumentiste a peu de choix sur ces instruments sans clés comme les buccins, cors ou clairon, et sur les salpinx grecques. En revanche, les trompettes disposent de trois pistons (parfois quatre) qui permettent de jouer toutes les notes de la gamme occidentale. Les trombones ont une coulisse qui joue le même rôle par ajustement continu.

La perce, ou la forme du tube, est cylindrique ou conique, ou une combinaison des deux formes. Dans les instruments antiques la perce est cylindrique ; les perces coniques, qui renforcent les harmoniques et la puissance de l'instrument, apparaissent à partir de la Renaissance. Le pavillon a une fonction importante sur l'intensité par l'adaptation d'impédance acoustique qu'il permet entre l'air en vibration dans le tube et l'air inerte extérieur (c'est le même processus dans les porte-voix) ; en revanche, contre toute apparence, le pavillon a un rôle négligeable dans la directivité.

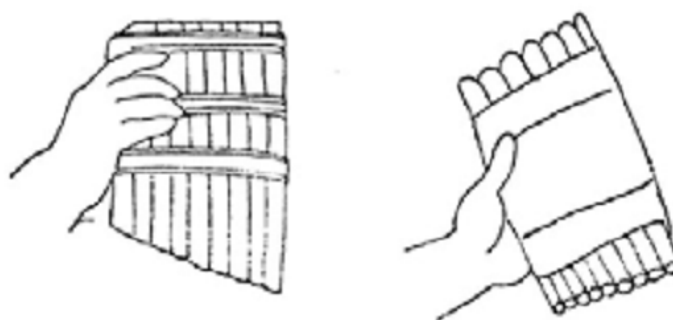
Les instruments à vent en Grèce antique

La syrinx

Les flûtes les plus anciennes sont préhistoriques ; ce sont des sortes de sifflets parfois percés de quelques trous. Il est probable que cet instrument simple ait eu une vitalité en Grèce dans les périodes archaïques. En Grèce, il semble que la flûte dite polycalame (composée de plusieurs tubes), syrinx ou flûte de Pan, soit très ancienne. On associe souvent cet instrument aux bergers qui en faisait usage dans les monts d'Arcadie, patrie mythologique de Pan. L'Arcadie est souvent représentée comme une terre de bergers et la syrinx est devenue son symbole, par exemple sur les monnaies. Toutefois, l'instrument était également en usage en Phrygie (Asie mineure). La flûte simple, archaïque (un seul tube avec trous), était semble-t-il jouée dans la période classique, également sous le nom de syrinx, qualifiée alors de monocalame.

La syrinx est un assemblage de plusieurs tubes de longueurs différentes et bouchés à l'extrémité inférieure. Le terme grec qui désigne un roseau est *calamos*. Le nom de l'instrument est la *syrinx*, du nom d'un roseau particulièrement adapté à la confection des flûtes (*suringias calamos*, qui signifie « roseau tubuleux ») : l'écorce est rigide et la pulpe

molle, ce qui facilite son extraction. Les tuyaux bouchés sont plus puissants que ceux des flûtes à trous qui sont ouverts, et produisent des sons de fréquence deux fois plus basse, donc à l'octave grave. Par ailleurs, on peut moduler la hauteur de son en jouant sur l'attaque du souffle, et s'affranchir ainsi de la fausseté inhérente aux flûtes peu propices à un accord fin. La forme généralement représentée, les tuyaux formant un trapèze, ou une aile d'oiseau, apparaît à l'époque hellénistique. Les syrinx anciennes sont de forme rectangulaire : les tuyaux sont de longueurs égales et l'accord se faisant par le réglage de la position du bouchon de cire à l'intérieur.



Syrinx

L'aulos

Traduire « aulos » par « flûte » est une erreur fréquente des auteurs antérieurs au XIX^{ème} siècle et qu'on rencontre encore aujourd'hui. Il s'agit d'un instrument à anche double, donc plus proche du chalumeau ou même du hautbois que de la flûte. La position correcte est de conserver le terme grec « aulos », « auloi » au pluriel.



Aulos (origine Pompei, Musée de Naples)⁵

Sur cette représentation des deux faces d'un aulos retrouvé à Pompei, l'embouchure est à droite, suivie d'un renflement du bois nécessaire pour atténuer les forces qui contraignent les fibres lors du souffle. Sur les représentations qui nous ont été transmises (céramiques, peintures, quelques sculptures) les auloi sont presque toujours doubles.

⁵ François-Auguste Gevaert, *Histoire et théorie de la musique dans l'Antiquité* t II, 1881, p. 280.



Jeune garçon jouant de l'aulos double (céramique IV^{ème} s. av. J.-C.)⁶

L'aulète place l'anche double dans la bouche et son souffle fait vibrer les deux fines lamelles de roseau, ce qui génère l'oscillation de la colonne d'air. Une analyse précise d'un aulos double conservé au Musée du Louvre a été effectuée par Annie Bélis qui en a publié les résultats en 1984. Cet aulos est rare car les deux tubes sont en très bon état et il est rare d'avoir un instrument complet. En mesurant les espaces entre les trous, différents sur les deux tubes, Annie Bélis a constaté qu'ils étaient dans des rapports correspondants aux intervalles en usage dans la musique grecque. La raison technique du doublement est que, dans le cas d'un tube unique, les trous seraient très proches. On sait que la musique grecque comprend de très petits intervalles, notamment dans le genre enharmonique. Les deux tubes sont complémentaires et permettent de jouer avec virtuosité en alternant les positions des doigts des deux mains sur les deux auloi. Il est peu probable que le jeu se fît en accord, mais plutôt à une voix, en alternant les deux tubes.

On voit sur la représentation d'un jeune aulète que ses joues sont très gonflées, ce qui suggère un effort important des muscles de la face. Pour maintenir les anches en bouche, l'usage était de fixer les deux tubes à la tête au moyen d'un arrangement de lanières qui passait sur la nuque et sur le dessus du crâne en enserrant les joues ; ce dispositif se nomme *phorbeia*.

Sur le plan physique, une onde stationnaire est générée dans le tube par la vibration de l'anche au moment de l'insufflation. L'aulos est considéré comme un tube semi-ouvert,

⁶ Jeune garçon jouant de l'aulos, détail d'une scène de banquet. Tondo (peinture ronde) d'une coupe attique à figures rouges, v. 460–450 av. J.-C., Musée du Louvre, G 467. Photo Jastrow, 2008, domaine public (creative common).

donc la longueur du tube correspond à un quart de la longueur d'onde de l'oscillation, ce qui en fait un instrument grave.

Généralement, on désigne les instruments représentés sur les céramiques sous le nom générique d'aulos. Pourtant, on sait qu'il existait cinq types de ces instruments à vent, selon une nomenclature d'Aristoxène qui nous a été transmise par Athénée⁷ :

Ἀριστοῦξενον ἐν πρώτῳ περὶ Αὐλῶν Τρήσεως λέγοντα πέντε γένη εἶναι αὐλῶν, παρθενίους, παιδικούς, κιθαριστήριους, τελείους, ὑπερτελείους.

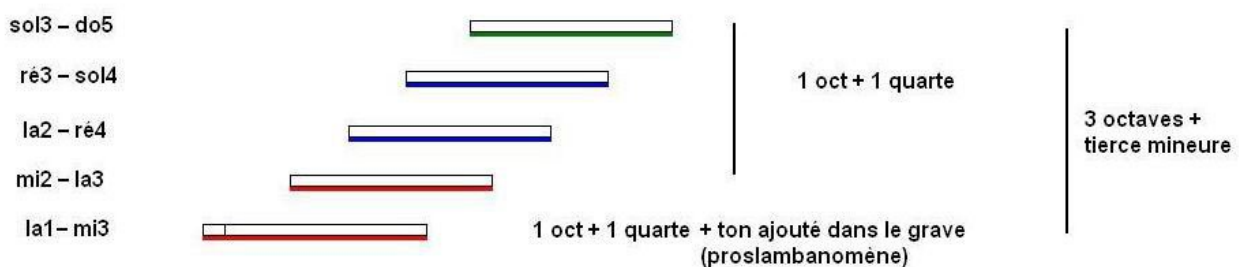
Aristoxène, au début de son *Des perforations des auloi*, distingue cinq genres d'auloi : le parthénien, l'enfantin, le citharistérien, le parfait et le plus-que-parfait.

Par ailleurs, le même Aristoxène, dans le traité qui nous est parvenu, les *Éléments harmoniques*, précise l'étendue totale des auloi :

δεῖ δὲ τὴν διάτασιν ὀρίζειν ἐνός τινος ὀργάνου τόνῳ καὶ πέρασιν. τάχα γὰρ ὁ τῶν παρθενίων αὐλῶν ὀξύτατος φθόγγος πρὸς τὸν τῶν ὑπερτελείων βαρύτετον μείζον ἂν ποιήσῃ τοῦ εἰρημένου τρις διὰ πασῶν διάστημα

Il est nécessaire de déterminer l'étendue de tel ou tel instrument par un ton et par des limites. En effet le son le plus aigu des auloi parthéniens, et le son le plus grave des auloi plus-que-parfaits, produisent un intervalle plus grand que la triple octave.

En attribuant à chaque genre d'aulos une tessiture comprenant une octave plus une quarte, ce qui est cohérent avec la tradition, on obtient les cinq genres qu'on peut, en transposant dans la notation moderne, placer entre le la1 et le do5 (c'est bien entendu arbitraire, mais cela correspond aux tessitures des voix humaines).



Selon l'usage dans les systèmes grecs, on ajoute un ton dans l'extrême grave, défini pour les cithares par la corde nommée « proslambanomène ». On voit qu'en effet, en prenant une octave plus une quarte pour chaque genre, on couvre plus de trois octaves.

⁷Athénée, *Deipnosophistes*, XIV, 9.

Dans son ouvrage très érudit sur la musique grecque, François-Auguste Gevaert distingue deux groupes, les voix féminines (les trois aiguës) et les masculines (les deux graves)⁸. Il se base sur un passage d'Hérodote qui mentionne ces deux types d'auloi :

Alyatte, roi de Lydie fit la guerre aux Milésiens. Il conduisit son armée sur leur territoire, laquelle entra dans le pays au son des syrinx, des pectis, de l'aulos féminin et de l'aulos masculin.

Maintenant que ces cinq genres ont été déterminés, on peut vérifier les dimensions généralement constatées sur les représentations et sur les vestiges retrouvés. On ne remarque pas d'aulos plus grand qu'environ 80 cm, c'est même la taille la plus fréquemment rencontrée sur les peintures. Parmi les auloi complets qui se trouvent dans nos musées, on a mesuré des instruments d'environ 40 cm.

Petit rappel sur les trois types de colonnes d'air susceptibles d'entrer en oscillation par ondes stationnaires. Les tubes sont de perce soit cylindrique, soit conique (on ne tient pas compte d'un éventuel pavillon) . Ils peuvent être ouverts aux deux bouts ou fermés à une extrémité.

- La longueur des tubes cylindriques ouverts aux deux bouts est de la moitié de la longueur d'onde. Ils génèrent tous les harmoniques mais de préférence ceux de rangs pairs (octaves). Le son est harmonieux (flûtes). L'excitateur est un sifflet composé d'un bec, d'un biseau et d'une fenêtre.

- La longueur des tubes cylindriques fermés à une extrémité est du quart de la longueur d'onde. Ils ne génèrent pas d'harmoniques de rang pair. Le son est plus brillant, voire criard. Ce sont souvent des instruments à anche (clarinette), mais la flûte de Pan avec bouchon de cire fait partie de cette catégorie.

- Les tubes coniques fermés à une extrémité se comportent comme les tubes cylindriques ouverts aux deux bouts. Ils génèrent des harmoniques pairs et impairs et leur longueur est de la moitié de la longueur d'onde. Ce sont des instruments à anche (hautbois) ou à embouchure (cuivres). Ils sont plus aigus que leur équivalent à tube cylindrique.

Les instruments grecs de l'Antiquité sont uniquement à perce cylindrique, donc ne répondent qu'aux deux premiers cas. Les auloi disposent d'une anche double, ce sont des tubes fermés à une extrémité. Les syrinx polycalames (flûtes de Pan) sont analogues aux auloi, ils sont fermés à l'extrémité inférieure. Les syrinx monocalames sont analogues aux flûtes douces modernes, la fenêtre du sifflet ouvre le tube et ce sont des tubes ouverts aux deux bouts.

⁸ François-Auguste Gevaert, *Histoire et théorie de la musique dans l'Antiquité*, Annoot Braekman, Gand, t I, 1875, t II, 1881.

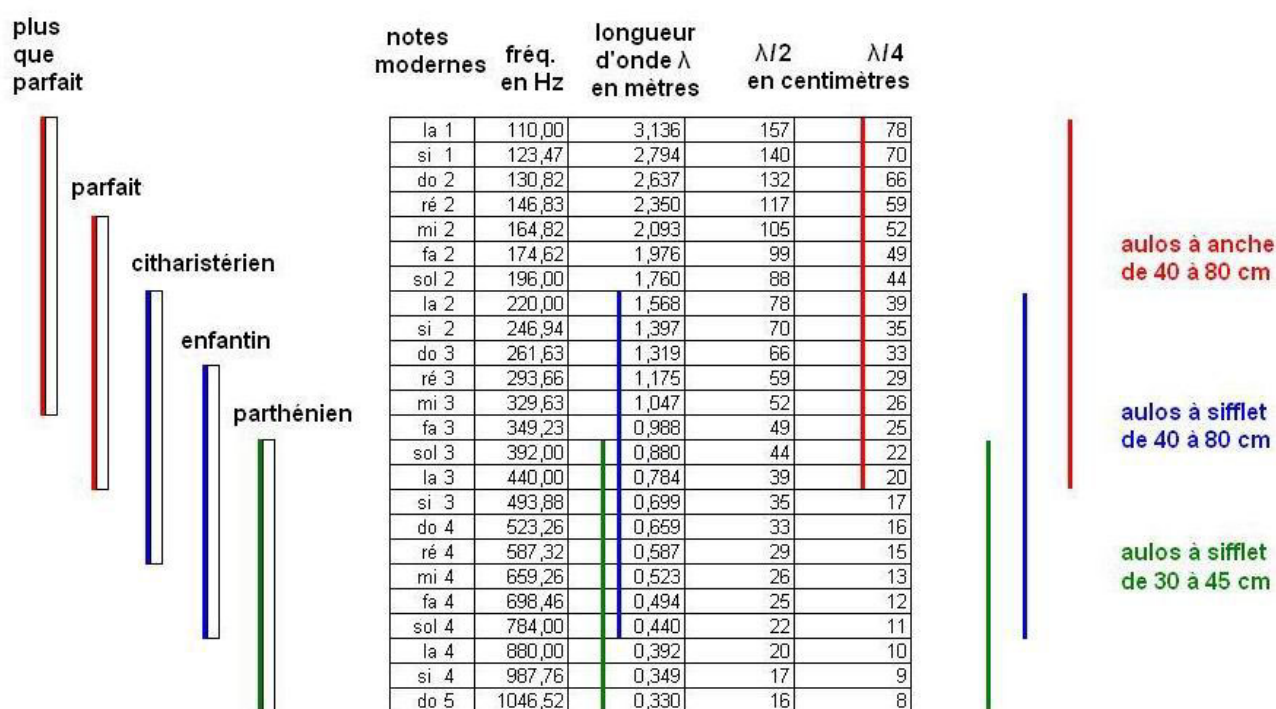
On admet que les auloi sont des instruments à anche à perce cylindrique, ce qui signifie que les ondes stationnaires sont en quart d'onde. Autrement dit, le son le plus grave de l'aulos plus-que-parfait est environ à 110 Hz, donc d'une longueur d'onde de 3,136 m, ce qui nécessite un tube d'une longueur d'environ 78 cm ($3,136/4$) ; cette mesure est cohérente avec les représentations. En revanche, ce même type d'aulos à anche, pour produire le son le plus aigu de l'aulos parthénien, a besoin d'un tube d'une longueur de 16 cm, ce qui est impossible car on ne peut pas, sur une si petite longueur, pratiquer des trous avec une précision suffisante, et les fibres ne résisteraient pas à la force du souffle très important pour produire un son sur un instrument à anche. D'ailleurs on ne voit pas de représentations d'aulos dont la taille est environ celle d'une main. Il est raisonnable de penser que les tubes ne mesuraient pas moins d'une quarantaine de centimètres, ce qui permet de produire en octaviant, un la_3 qui serait donc l'équivalent de la limite aiguë de l'aulos parfait.

On doit donc admettre que pour produire les sons plus aigus, on avait recours à un type d'instrument ouvert aux deux bouts, et donc non plus à anche, mais à sifflet, ou si l'on veut à l'assemblage bec, biseau, fenêtre qu'on peut nommer un « sifflet » . La fenêtre transforme le type d'onde stationnaire puisque d'un tube fermé à une extrémité on passe d'un tube ouvert aux deux bouts. Dans ce cas, la longueur du tube est d'une demi longueur d'onde, et par ailleurs, l'énergie nécessaire pour produire un son est bien moindre. En revanche le son est moins puissant, mais il se propage plus loin, étant de fréquence plus élevée. L'instrument devient alors une syrinx qu'on appelle « monocalame » (à un seul tube), pour la distinguer des flûtes de Pan qui sont dites « polycalames ». Toutefois, rien ne permet, à distance et donc sur les représentations, de distinguer les deux types d'instruments, aulos à anche et aulos à sifflet. On dispose de témoignages tardifs qui d'ailleurs donnent au sifflet de ces instruments le nom de syrinx ⁹:

Téléphanès le Mégarique avait une telle aversion pour les syrinx qu'il ne permit jamais à ses facteurs d'en adapter à ses flûtes : ce fut la principale raison qui l'empêcha de concourir aux jeux Pythiques.

De même que l'aulos désigne plus généralement un tube cylindrique avec des trous, la syrinx évoque, d'une façon générale, tout instrument à vent muni d'un bec à biseau, donc d'un sifflet, puis, par métonymie, le sifflet lui-même. Il n'est pas impossible de penser que les tubes aient pu être munis soit d'une anche, soit d'un sifflet, et que les facteurs de tubes et les facteurs d'embouchures étaient deux métiers différents.

⁹Ps-Plutarque, *De la musique*, XI, traduction Weill et Reinach, 1900. Les jeux Pythiques dont il est question étaient pratiqués à Thèbes ; un concours d'aulètes avait lieu uniquement sur des auloi à syrinx, c'est à dire sur les flûtes monocalames (F.-A. Gevaert, *Hist et th. dans l'Antiquité*, t II, p. 569-570).



Les cinq genres d'auloi d'Aristoxène et leur tessiture
Les instruments à anche ne peuvent pas monter au delà du la3
Les instruments à sifflet ne peuvent pas descendre en dessous du la2

Les instruments à cordes en Grèce antique et chez les « barbares »

Au centre de la théorie musicale grecque se trouve la notion d'intervalle encadré par deux cordes, nommés « intervalles incomposés » par Aristoxène. Le nombre de cordes est important et il n'a cessé d'augmenter depuis la lyre archaïque qui n'en comprend que trois ou quatre, jusqu'aux instruments décrits par les auteurs des époques tardives. Deux étapes marquent cette évolution : le passage à sept cordes (heptacorde) au VII^{ème} siècle, et l'ajout d'une huitième par les Pythagoriciens à la fin du VI^{ème} siècle.

Il existe en Grèce plusieurs instruments à cordes, tous à peu près semblables dans leur principe. Ils sont dépourvus de manche ; les cordes sont jouées « à vide », sans avoir recours à une pression du doigt pour raccourcir leur longueur. La hauteur de note est déterminée par la grosseur et par la tension de la corde puisque la longueur est identique pour toutes les cordes. La caisse de résonance n'est pas placée à proximité et parallèlement aux cordes comme sur les instruments modernes (violon, guitare), mais à une extrémité des cordes, en communication avec le dispositif de fixation.

Les légendes : Hermès, Amphion

La lyre (λύρα, *lura*) demeure longtemps l'instrument favori des musiciens grecs. Elle est constituée, à l'origine, d'une carapace de tortue sur laquelle est tendue une peau. Cette caisse de résonance est pourvue de deux cornes entre lesquelles une traverse reçoit

les cordes en tension. Une des légendes racontant l'invention de la lyre est transmise dans un des *Hymnes homériques*, l'hymne à *Hermès*, difficile à dater mais dont la mise en écrit n'est pas antérieure au IV^{ème} siècle av. J.-C., si l'on s'en tient à la version qui nous a été transmise. La légende est racontée et vraisemblablement chantée par les aèdes depuis longtemps, et elle a été rapportée par plusieurs auteurs grecs¹⁰.

Voici l'histoire : Hermès enfant, encore au berceau, s'échappe de son antre et rencontre une tortue ; il l'emmène, la tue et la vide à l'aide d'un outil en fer. Il tend une peau sur la carapace en la fixant avec des bâtons de roseau ; il fixe, on ne sait pas comment, deux cornes de chèvres sur l'instrument, entre lesquelles il adapte une branche de chêne vert, puis confectionne les cordes avec les boyaux de brebis. Content de lui, il part pour de nouvelles aventures, s'en va voler les bœufs de son frère Apollon et finalement, lui cède la lyre, sur l'injonction de Zeus appelé en arbitre par le frère lésé, en échange de la clémence.

Une autre légende raconte que la lyre a été donnée à Amphion, fils de Zeus et d'Antiope et fondateur de Thèbes, avec le pouvoir de déplacer les pierres lorsqu'elle est jouée. Voici comment Philostrate, auteur d'une série de descriptions de peintures au III^{ème} siècle de notre ère, montre la lyre d'Amphion appelant les pierres qui s'assemblent pour élever seules les murs de Thèbes¹¹ :

On dit qu'Hermès le premier s'avisa de construire une lyre avec deux cornes, une pièce transversale et une carapace de tortue, et qu'il donna cet instrument d'abord au dieu Apollon, aux Muses, enfin à Amphion le Thébain. Or Amphion qui vivait à Thèbes, lorsque cette ville n'avait pas encore de murailles, parla aux pierres le langage de la mélodie et les voici qui, dociles à ses accents, accourent en foule. [...]

[description de la peinture par Philostrate] La corne, la corne du bouc bondissant, selon l'expression du poète, sert à la fois pour la lyre du musicien, et pour l'arme de l'archer : noires, dentelées, capables de porter un coup terrible, sont ici les cornes qui forment les montants ; pour les parties qui doivent être en bois, on a choisi un buis lisse, d'un grain serré. L'ivoire ne paraît nulle part, les hommes ne connaissant alors ni l'éléphant, ni l'usage qu'on devait faire un jour de ses défenses. La carapace est noire ; elle est peinte d'après nature, sur toute sa surface des cercles irréguliers inscrivent des ombilics de couleur blonde. Portée par le chevalet, la partie inférieure des cordes fait saillie et vient à la rencontre des ombilics ; au-dessous du joug, on dirait (je ne vois rien de mieux pour les décrire)

¹⁰ *Hymnes homériques*, à *Hermès*, 31-67. L'auteur de cet hymne parle tantôt de *phorminx* (φόρμιγξ, v. 64), tantôt de « tortue chantante » (χέλυσ αοιδος, v. 25), mais une seule fois de lyre, tout à la fin de l'hymne (λύρα, v. 423). La légende fait l'objet également d'une comédie de Sophocle, *Les limiers*.

¹¹ Philostrate, *Images*, I, 10. Amphion, fils de Zeus et d'Antiope et frère de Zéthos, passe pour être le fondateur de Thèbes. Il avait le pouvoir de déplacer les pierres avec le son de la lyre.

qu'elles se sont couchées bien droites sur la lyre.



Amphion et Zéthos - Copie d'un bas-relief du Palazzo Spada (Rome)¹².

Philostrate termine ainsi son récit :

Ce sont là de charmantes pierres, en vérité, qui rivalisent de zèle et travaillent en mercenaires sous les ordres du musicien ! Le mur a sept portes autant que la lyre a de cordes.

Pausanias fait allusion à cette légende et tente une explication rationnelle¹³ :

Homère nous apprend qu'ils [Amphion et Zéthos] fermèrent la ville de Thèbes par sept bonnes portes, et qu'ils élevèrent des tours d'espace en espace ; sans quoi, dit- il, tout redoutable qu'ils étaient, ils n'eussent pu habiter sûrement cette grande ville. Le poète ne dit pas un mot de la voix merveilleuse d'Amphion, ni des murs de Thèbes, bâtis au son de sa lyre. Pour moi, je crois qu'Amphion ne fut réputé si grand musicien, que parce qu'étant parent de Tantale, il avait appris la musique des Lydiens [Asie mineure], qu'il en avait transporté l'harmonie chez les Grecs, et qu'aux quatre cordes que la lyre avait déjà, il en avait ajouté trois autres.

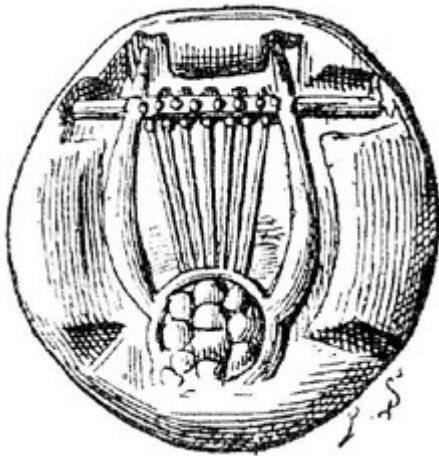
¹² Julius Troschel : Zethus und Amphion, entre 1840 et 1850, Nouvelle Pinacothèque de Munich ; photo Rufus46, Creative Commons (libre de droits).

¹³Pausanias, IX, 5.

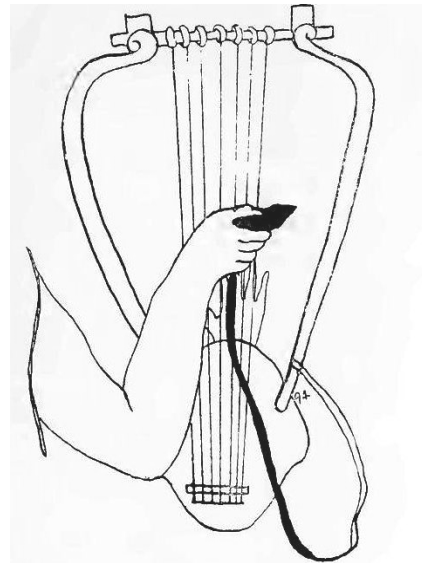
Cependant le mythe d'Hermès est celui qui a le plus marqué la culture grecque à propos de l'apparition des instruments de musique. Comme toutes les légendes concernant les inventions, il faut relativiser et s'enquérir de probables procédés identiques auprès d'autres cultures, comme l'indique d'ailleurs Mersenne qui évoque cette histoire en 1634 dans les *Questions harmoniques* :

[153-] Beaucoup ont escrit que Mercure inventa la harpe sur le squelet d'une Tortuë : surquoy i'ay remarqué que nous avons trouvé au nouveau monde, les Canadois, les Hurons, et assez d'autres peuples dansans au son d'une Tortuë dessechée, comme si ceste opinion estoit passée d'Europe en l'Amerique, ou (selon le Timée de Platon) de l'isle Atlantide aux Athenes Grecques.

La résonance d'une carapace de tortue n'est pas l'apanage des Grecs anciens, elle résulte d'une observation davantage que d'une invention, il n'est donc pas étonnant que l'instrument ait existé dans d'autres cultures, et les Grecs anciens attribuent volontiers à quelque divinité l'invention d'un procédé déjà connu ailleurs mais considéré comme d'origine barbare.



1 - À carapace de tortue



2 - Avec plectre (Vème s. av. J.-C.)

Lyres archaïques heptacordes¹⁴

¹⁴ 1 : Monnaie de Calymna, British Museum. Illustration provenant de : Ch. Daremberg et E. Saglio, *Dictionnaire des Antiquités grecques et romaines*, Hachette, Paris, 1877-1919, 10 tomes., art. Lyra.

2 : British Museum. Illustration provenant de : K. Schlesinger, *The instruments of the modern orchestra*, London, Reeves, 1910, t. II, p. 295.

La lyre grecque

Selon les nombreuses représentations trouvées sur des céramiques, la forme de la lyre est à peu près fixée au VI^{ème} siècle avant notre ère. Ses éléments sont invariablement la carapace de tortue, les deux cornes et la traverse supportant les cordes en tension. Les cordes sont confectionnées à partir de boyaux d'animaux, matière solide et stable lorsqu'elle est tendue.

Sur les représentations de lyre du V^{ème} siècle dont nous disposons, les carapaces sont approximativement de la taille d'une tête humaine, légèrement plus grande, ce qui suggère une longueur de carapace d'environ 30 cm¹⁵ :



1 - 470-460 av. J.-C.



2 - vers 460 av. J.-C.

¹⁵ 1 - Face A d'un lécythe attique à figures rouges, 470-460 av. J.-C. (Musée arch. national de Madrid) ; ; photo Marie-Lan Nguyen, Creative Commons (libre de droits).

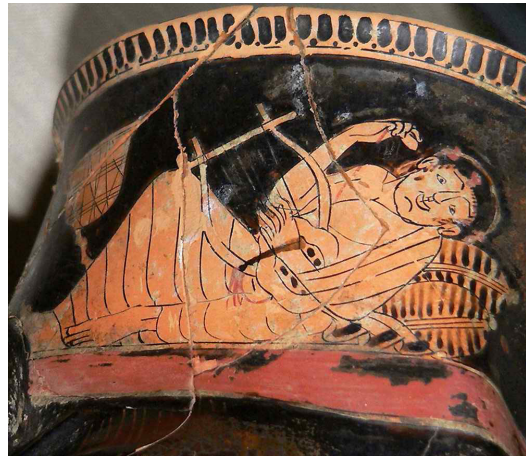
2 – Apollon avec sa lyre - Médaillon d'un kylix attique (Musée arch. de Delphes) ; photo Fingalo, Creative Commons (libre de droits).

3 - Intérieur d'un kylix attique à figures rouges, vers 510 av. J.-C. (Musée du Louvre) ; photo Marie-Lan Nguyen, Creative Commons (libre de droits).

4 - Rhyton à tête de chien, peintre de Brygos, 490-470 avant J.-C. (Musée d'Aleria) ; photo Clio20, Creative Commons (libre de droits).



3 - vers 510 av. J.-C.



4 - 490-470 avant J.-C.

Les tortues utilisées pour la fabrication des lyres sont probablement celles qu'on nomme tortues grecques de la sous-espèce *ibera* (20 à 25 cm), ou *hermanni*, plus petites (environ 20 cm). Toutefois les fabricants de lyres recherchaient sans doute les plus grandes carapaces, comme celles de l'espèce *tortosa marginata*, parmi les plus grandes d'Europe (plus de 30 cm) et qu'on rencontre en Grèce et en Turquie, sur la côte occidentale d'où provient la lyre heptacorde. Elle était sans doute présente sur le versant sud de l'Arcadie, comme le signale Pausanias¹⁶ :

Le mont Parthénion nourrit beaucoup de tortues dont l'écaille est très propre à faire des lyres. Mais les gens du lieu qui croient ces tortues consacrées à Pan se font un scrupule de les tuer, et ne permettent pas non plus que les étrangers en emportent.

*tortosa marginata*

¹⁶Pausanias, VIII, 54.

Cependant, une étude de Paul Courbin réalisée en 1980 sur deux carapaces trouvées en 1956 dans une petite fosse près du théâtre d'Argos, nuance cette thèse¹⁷. Plusieurs indices montrent qu'elles pouvaient être destinées à la confection de lyres. Ces tortues sont de l'espèce *hermanni* et mesurent environ 16 cm de long, ce qui en fait des caisses de résonance de petites tailles. On constate donc que de petites lyres ont été fabriquées, cette découverte le montre, forcément moins sonores ; il s'agit peut-être d'instruments d'étude, d'objets décoratifs ou de jouets.

À la fin de l'*Odyssée*, Homère compare le geste d'Ulysse bandant son arc à « un homme habile en l'art de la *phorminx* et du chant, [qui] tend aisément autour d'une cheville neuve une corde bien tendue, après avoir fixé par les deux bouts ce boyau de mouton ». On apprend ainsi les principaux éléments de la *phorminx* : la traverse (*zugon*, ζυγόν) sur laquelle sont fixées les cordes en boyau de mouton (*entéros oïos*, ἔντερος οἰός) au moyen de chevilles (*kollops*, κόλλοψ).

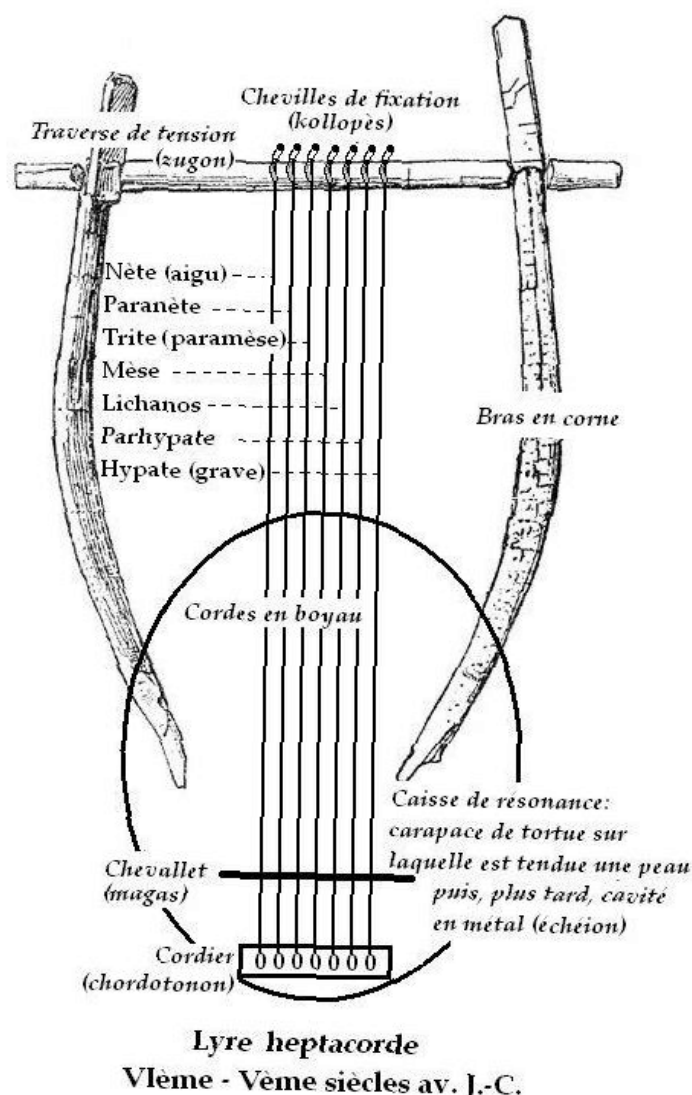
Le procédé de fixation des cordes sur la traverse (*zugon*) n'est pas éclairci. Annie Bélis s'est attardée sur ces mystérieux *kollopès* qui constituent le dispositif de fixation capable de supporter durablement une tension de quelques kilogrammes¹⁸. On parle de lanières de cuir, traduction de ces *kollopès*, puis de bagues de métal ou d'autre matériau dur, enfin de chevilles, sorte de clous fixés dans la traverse, mais qui ne permettent l'accord que si elles sont capables de tourner en maintenant la tension, ce qui suppose qu'elles soient coniques.

Les vibrations des cordes deviennent sonores lors de leur transmission par le chevalet à la caisse de résonance formée par la carapace de tortue sur laquelle sont fixée les cordes. Par la suite, sur la *kithara*, la caisse de résonance est fabriquée en bois et prend une forme rectangulaire, plus pratique à confectionner et surtout beaucoup plus sonore.

On joue sur la lyre en pinçant les cordes à vide qui ne produisent donc qu'un seul son. Les cordes des lyres, comme celles de la plupart des instruments grecs, sont de longueur à peu près égale et l'accord se fait en les tendant plus ou moins et sans doute en les choisissant plus ou moins grosses, par exemple en les doublant.

¹⁷Paul Courbin, « Lyres d'Argos », in *Bulletin de correspondance hellénique*, Suppl. 6, 1980. pp. 93-114.

¹⁸ Annie Bélis, « À propos de la construction de la lyre », in *Bull. de corresp. hellénique*, 109-1, 1985, p. 201-220.



Phorminx et kitharis chez Homère

L'instrument de musique de référence dans la Grèce archaïque est la *phorminx*, instrument à cordes pincées. La *phorminx* d'Homère a un son clair (φόρμιγξ λίγεια, *phorminx ligéia*). Dans l'*Iliade* (IX, 186), Achille, sous sa tente, « charme son cœur avec une *phorminx* au son clair, belle *phorminx* ouvragée que surmontait une traverse (zugon, ζυγόν) d'argent ». Cette *phorminx* a été prélevée sur le butin lors d'un combat à Thèbè Hypoplakos en Éolide (Asie mineure), contre Eétion, roi de Cilicie. Cette région est située en face de l'île de Lesbos, patrie de Sappho, d'Alcée, d'Arion, et de Terpandre, célèbres poètes musiciens des VII^{ème} et VI^{ème} siècles.

La *phorminx* comprend trois ou quatre cordes, selon les sources, mais plus probablement quatre. Il semble bien que la *phorminx* soit d'origine asiatique (Asie mineure), comme le suggère d'ailleurs l'extrait d'Homère qui évoque la *phorminx* trouvée en Éolide. Toutefois, les Éoliens étaient d'origine grecque, de Thessalie, ce qui confère à la *phorminx* une coloration hellénique.

Homère évoque aussi une mystérieuse *kitharis* qui désigne, d'une façon générale, l'instrument employé lors de réjouissances musicales qui accompagnent les

festins¹⁹. On trouve deux occurrences pour kitharis (qu'il faut distinguer de la kithara) pour quatre phorminx dans l'*Illiade* ; dans chaque cas, la phorminx est jouée par un Grec (Apollon, Achille, et dans la description de son bouclier, jouée par des enfants), et la kitharis par un Troyen (Pâris). Dans l'*Odyssée* la phorminx est jouée soit par Démodocos, l'aède aveugle qui joue aux festins des Phéaciens (chant VIII), soit par Phémios, le musicien d'Ithaque ; la kitharis apparaît dans la bouche d'Alkinoos s'adressant au Phéaciens, habitants d'un pays inconnu et lointain. On peut percevoir une logique, la phorminx « que les dieux ont donnée pour compagne aux festins²⁰ » est grecque, c'est un présent d'Apollon ; la kitharis est un instrument étranger, troyen ou phéacien²¹.

Pindare emploie kitharis une seule fois dans les *Odes* qui nous sont parvenues, pour douze occurrences de phorminx²². On trouve également la kitharis dans l'*Hymne à Apollon* et dans l'*Hymne à Hermès*, celui où l'on décrit l'invention de la lyre. L'instrument est nommé soit phorminx, soit kitharis, et une seule fois lyre. Les *Hymnes* confondent les trois termes sans les différencier, ce qui constitue un indice supplémentaire en faveur d'une rédaction plus tardive qu'on ne le dit généralement, malgré le style purement homérique.

En revanche, un extrait des *Thesmophories* d'Aristophane nous renseigne, au moins sur l'origine asiatique de la kitharis, nommée ici « asiade » (Ἀσιάδος, v. 120) :

Agathon : Et Léto, et les sons de la lyre asiatique (Ἀσιάδος) imitant par le rythme les mouvements rythmés des Charites Phrygiennes.

Le chœur d'Agathon : J'honore la puissante Léto, et la kitharis (κίθαρις), mère des hymnes, aux mâles et nobles accents, dont l'éclat fait étinceler les yeux de la Déesse, émue par la soudaineté de notre voix.

Les quelques autres occurrences de kitharis dans le corpus grec se trouvent dans des textes tardifs qui reprennent les vers d'Homère. Toutefois, si on accorde foi

¹⁹Il n'y a aucun lien, si ce n'est la quasi homophonie, entre la kithara et la cithare (instrument à cordes de longueurs inégales et à caisse parallèle aux cordes) ni avec le sitar (sorte de luth au long manche d'origine indienne), auxquels on peut ajouter la guitare ; ces instruments sont beaucoup plus récents. Toutefois, l'étymologie, d'ailleurs inconnue, est commune à ces instruments, et probablement d'origine asiatique, comme l'instrument. Il convient, pour éviter les confusions, d'abandonner le terme « cithare », fréquemment utilisé par les hellénistes du XIX^e siècle, et de conserver le terme moins ambigu de « kithara ». On admet toutefois le « citharède » qui ne prête pas à confusion.

²⁰*Odyssée*, XVII, 271.

²¹Phémios joue de la phorminx aux chants XVII, XXI, XXII, XXIII. Mais au chant I de l'*Odyssée*, l'aède, qui joue contre son gré pour les prétendants de Pénélope, joue de la kitharis (cité à deux reprises). Cette incohérence est troublante. Peut-être Phémios a-t-il changé son instrument entre le début et la fin de l'*Odyssée*... Peut-être ces vers sont-ils des ajouts ultérieurs. Nous n'en savons pas davantage.

²² Pindare, *Pythiques*, V, 65.

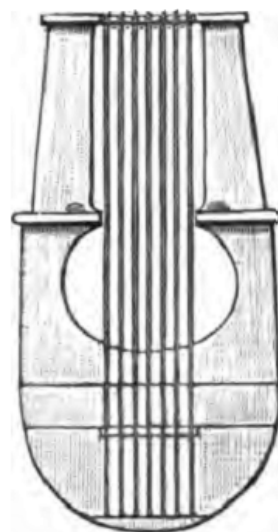
à un témoignage d'Aristoxène cité par un grammairien réputé au IV^eme siècle à Alexandrie, Ammonios, la kitharis ne serait qu'un nom ancien de la lyre²³ :

Κίθαρις καὶ Κιθάρα διαφέρει, φησὶν Ἀριστόξενος, ἐν τῷ περὶ ὀργάνου. Κίθαρις γὰρ ἐστὶν ἡ λύρα καὶ οἱ χρώμενοι αὐτῇ, Κιθαρισταί, οἷς ἡμεῖς λυρωδοὺς φαμέν· Κιθάρα δὲ, ἣ χρῆται ὁ κιθαρωδός.

La kitharis et la kithara diffèrent, dit Aristoxène dans son *Sur les instruments*. Car la kitharis est la lyre, et ceux qui en jouent sont appelés kitharistes ; pour nous [les musiciens] nous les nommons les lyrodes et ceux qui jouent la kithara, les kitharèdes.



Lyre



Kithara²⁴

Deux origines sont à la source de cette famille grecque d'instruments à cordes pincées de longueurs égales. On distingue d'une part une origine probablement grecque avec la chelys (tortue) légendaire d'Hermès et sa carapace de tortue, puis la phorminx et la kitharis, citées par Homère et probablement devenues synonymes de la lyre et, d'autre part une origine asiatique ancienne d'un instrument à caisse rectangulaire en bois et muni de cinq à dix cordes de longueur égale qui a donné naissance à la kithara, sans doute par l'intermédiaire de la kitharis. On entrevoit un conflit linguistique et culturel pour un même objet : la lyre (chelys ou phorminx) représentée comme symbole de l'instrument grec avec son indispensable carapace de tortue, et un instrument d'origine asiatique mais de structure identique dont la version vulgaire serait la kitharis et la version professionnelle la kithara, qu'Aristote qualifie de τεχνικὸς ὄργανος (instrument technique)²⁵.

²³ Ammonios le Grammairien, *De differentia ad finium vocabulorum*, texte grec par L. C. Valckenaer, Leipzig, 1822, p. 82.

²⁴ François-Auguste Gevaert, *Histoire et théorie de la musique dans l'Antiquité*, Annot Braekman, Gand, t II, 1881, p. 249 (photo domaine public).

²⁵ Selon Pierre Chantraine, le caractère asiatique serait confirmé par l'accentuation de Κίθαρις (proparoxyton) qui évoque une origine éolienne (P. Chantraine, *op. cit.*, p. 530).

Toutefois, dans son étude sur la fabrication de la lyre, Annie Bélis rapproche la kitharis de la lyre primitive, ce qui est conforme au texte d'Homère, tandis que la phorminx serait l'ancêtre de la lyre-berceau sur laquelle les deux montants sont d'un seul tenant recourbé à la base en formant caisse de résonance. Et en effet, on rencontre ce type d'instruments dans les civilisations des Cyclades, bien avant que la Grèce s'éveille.



à g. : Sarcophage d'Aghia Triada (Crète) - entre 1370 et 1320 av. J.-C.²⁶

à dr. : Phorminx - Apollon citharède - VIIème siècle²⁷

Le dessin de droite représente un détail d'une cuirasse en bronze trouvée le lit de l'Alphée, fleuve du Péloponnèse. Selon S.-W. James qui l'a étudiée elle serait de facture ionienne du VIIème siècle²⁸. Cette phorminx a cette forme arrondie caractéristique, souvent représentée sur les céramiques :

²⁶Partie de la fresque du sarcophage d'Aghia Triada daté d'entre 1370 et 1320 av. J.-C., Musée archéologique d'Héraklion. Photo Wolfgang Sauber, Creative common (libre de droits).

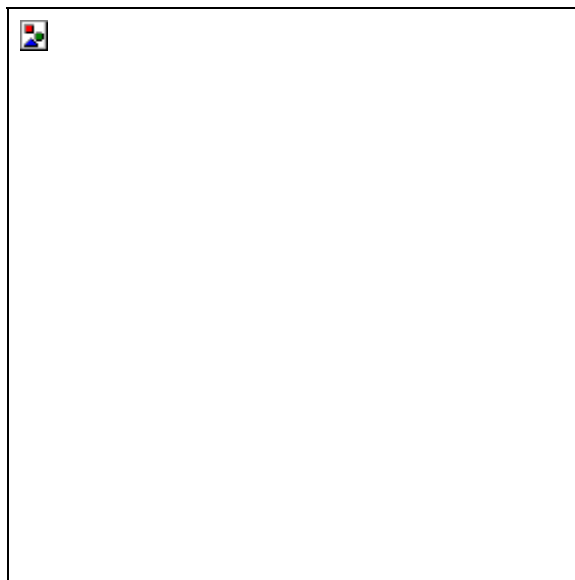
²⁷ Reproduction d'un détail d'une cuirasse en bronze de facture ionienne. Extrait de Daremberg et Saglio, *Dict. Ant. Gr. et Rom.*, 1877. Photo : domaine public.

²⁸S.-W. James, « Une cuirasse antique », in *Bulletin de correspondance hellénique*. Vol. 7, 1883. pp. 1-5.



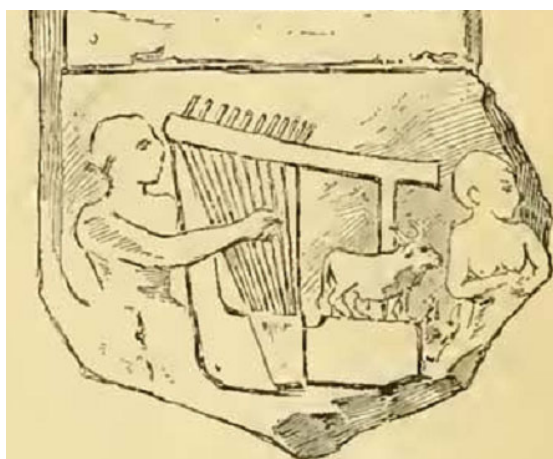


Moulage d'une des « lyres » retrouvées en 1929 sur le site d'Ur par C.-L. Woosley (2600 av. JC)³².



Reconstitution présentée au University of Pennsylvania Museum (*The Great Lyre of Ur*).

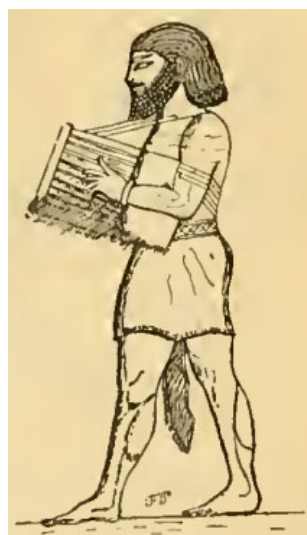
³² *Ibidem*, plate 111. U 12354, silver lyre from the great death-pit, PG/1237.



Détail de la stèle dite « de la musique » – Girsu (Tello, Irak)
Époque de Gudea, prince de Lagash (env. 2100 av. J.-C.)³³

Les cordes des « lyres » sont tendues entre la caisse de résonance et une traverse soutenue par deux montants. Même si les premières « lyres » sont de cordes inégales et une forme trapézoïdale, la tendance est à l'égalité des longueur des cordes, avec une forme de l'instrument qui se rapproche du rectangle.

À côté des harpes assyriennes ou sumériennes anciennes, on a des représentations plus récentes d'instruments à cordes égales, qui datent probablement de l'époque d'Homère, provenant des sites de Ninive et de Dur-Sharrukin (fin du VIII^{ème} siècle) au nord de l'Irak actuel.



Deux « harpes » assyriennes du X^{ème} et VIII^{ème} siècle av. J.-C.³⁴

³³Musée du Louvre. Extrait de Lavagnac, *op. cit.*, p. 36. [Comm. de l'auteur : on peut trouver facilement une photo assez ordinaire en payant une seconde fois (la première étant l'impôt) auprès de l'établissement public subventionné RMN, structure commerciale des musées nationaux.]

³⁴À g. : harpe cithare, bas-relief de Ninive (env. X^{ème} s.); à dr. : cithare rectangulaire, bas-relief de Dur-Sharrukin (fin du VIII^{ème} s.). Dessins extraits de : Albert Lavagnac, *Encyclopédie de la Musique et Dictionnaire du Conservatoire*, 11 vol., Delagrave, Paris, 1913-1931, vol. I, p. 39. Domaine public.

Sur la première représentation, les cordes sont inégales et l'instrument préfigure la kithara rectangulaire qui trouve sa forme sans doute plus tard. Le dessin de droite est daté avec assez de précision puisque la construction du site de Dur-Sharrukin est achevée en 706 av. J.-C. et que cette cité a été abandonnée peu après.

On peut suivre la trace du parcours de ce type d'instrument avec par exemple une représentation d'une citharède hittite du Xème siècle av. J.-C., dans la ville de Maras, au sud-est de la Turquie.



Instrument en forme de kithara hittite (Asie mineure), Xème s. av. J.-C.³⁵

Si celle de la lyre est en écaille de tortue, la caisse de résonance de la kithara est en bois et se prolonge dans les montants qui encadrent les cordes, ce qui rend la kithara plus sonore et la destine aux prestations publiques au cours des festins ou des célébrations. Dans le traité plutarquien *De la musique*, on évoque quasiment toujours la kithara. On y lit à propos de son origine :

La forme de la kithara fut fixée en premier lieu par Képion, disciple de Terpandre ; on l'appela Asiade parce qu'elle était en usage chez les citharèdes de Lesbos, île voisine de l'Asie.

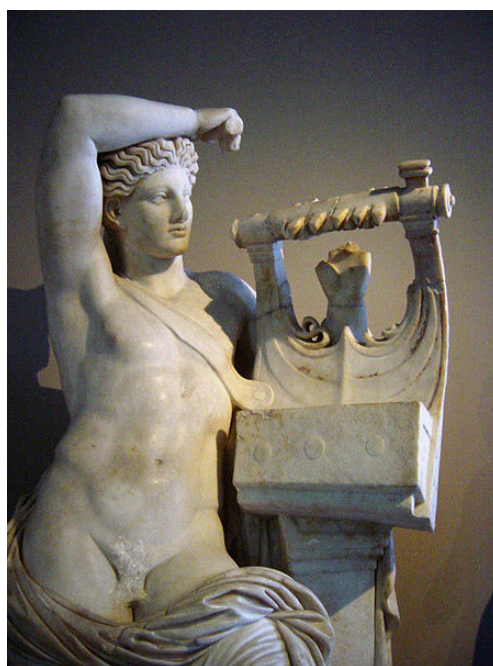
L'auteur du traité *De la musique* attribué à Plutarque évoque bien l'origine asiatique, hittite, de ce type d'instrument.

Aristote en parle comme d'un instrument technique réservé aux professionnels. Les Anciens jouaient directement avec les doigts, tandis que la kithara est jouée avec un plectre ; ceci s'explique par la plus grande robustesse des bras en bois fixés à la caisse, ce qui permettait de tendre davantage les cordes, mais rendait le pincement plus difficile.

³⁵ Extrait de Lavagnac, *op. cit.*, p. 51.



Kithara - Apollon citharède – Bas relief de Mantinée (Praxitèle, IVème siècle)³⁶



Apollon citharède – IIème s. ap. J.-C. - Milet³⁷

On remarque que les bras de la kithara sont courbés vers l'avant, ce qui généralement n'apparaît pas sur les représentations picturales.

³⁶ G. Fougères, « Bas-reliefs de Mantinée : Apollon, Marsyas et les Muses », in *Bulletin de correspondance hellénique*, Vol. 12, 1888. pp. 105-128. Photo : Marsyas, GFDL & CC BY-SA, Creative common (libre de droits).

³⁷ Musée d'Istanbul. Photo G.dallorto, Creative common (libre de droits).

Les dérivés de la lyre : barbitos, pectis, magadis

Ces types d'instruments, la magadis et la pektis sont venus d'Asie proche orientale (Phénicie, Syrie) par l'actuelle Turquie (Lydie, Phrygie, Ionie, Lesbos), ainsi que d'Égypte. Ils pénètrent en Grèce au VII^{ème} siècle avant notre ère, soit peu avant Terpandre et Pythagore.

La magadis, et la pektis qui est plus petite et plus aiguë, sont des instruments à vingt cordes accordées à l'octave, par paires. Ils sont décrits notamment par Athénée³⁸ :

Selon Ménechme, dans son ouvrage sur les artistes, ce fut Sapho qui inventa la pektis, même instrument que la magadis. Aristoxène écrit que la magadis et la pektis se jouent sans plectre, mais en pinçant les cordes en même temps que l'on chante; que c'est pour cette raison que Pindare, dans un scolie en l'honneur d'Hiéron, appelle la magadis *psalmos antiphtongos*, parce que l'on faisait entendre en même temps sur cet instrument un accord d'octave, en accompagnant des enfants et des hommes qui chantaient de même.

Ces instruments polycordes sont d'origine lydienne (centre de la Turquie). Ils sont en usage en Ionie depuis des époques reculées, au moins au VII^{ème} siècle, comme l'assure à nouveau Athénée³⁹ :

Pindare dit clairement que Terpandre avait imaginé le barbitos qui s'accordait en partie avec la pektis, qui était d'usage chez les Lydiens. Voici le passage du poète :

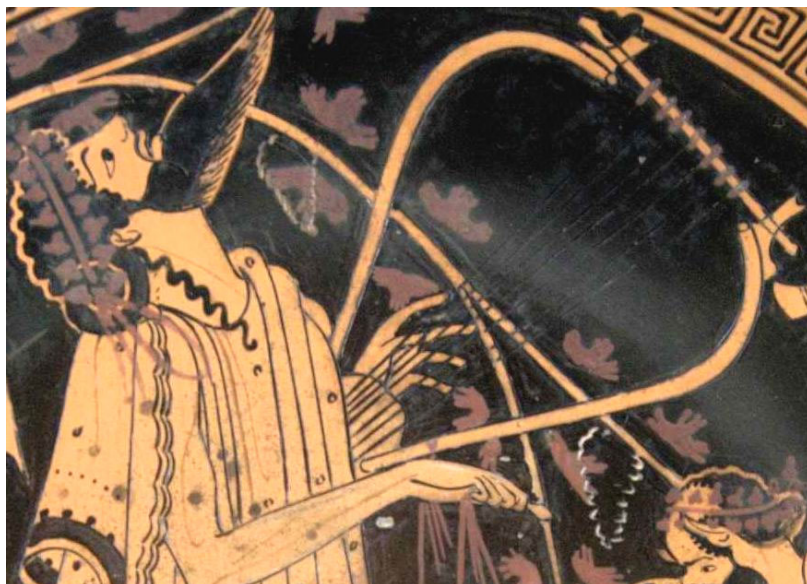
« Terpandre de Lesbos l'imagina comme un instrument d'un son correspondant avec la pektis lydienne, dont il avait entendu le son noble dans quelques repas. »

Or, la pektis et la magadis sont le même instrument, selon ce que disent Aristoxène et Ménechme de Sicyone dans son *Traité des Artistes*. Ménechme assure même que Sapho, qui est plus ancienne qu'Anacréon, joua la première de la pektis. Mais Terpandre est aussi plus ancien qu'Anacréon.

Le barbitos ou barbiton aurait donc été inventé par Terpandre à la fin du VII^{ème} siècle à Lesbos. Il s'agit d'une lyre aux cordes plus longues, donc à la sonorité plus grave. Cet instrument contemporain de la lyre, est peu représenté.

³⁸Athénée, *Deipnosophistes*, XIV, 9.

³⁹ Athénée, *idem*.



Barbiton.

Détail de l'intérieur d'une coupe attique à figures rouges, vers 480 av. J.-C.⁴⁰

Les instruments à cordes inégales : sambuka, harpes

Il existe une seconde famille d'instruments à cordes désignée généralement par le terme générique de harpes. Nous avons des traces que ces instruments à cordes pincées avec les doigts sont connus depuis plusieurs millénaires en Égypte et en Mésopotamie. Il est probable que leur origine soit l'observation du son produit par la vibration d'une corde d'arc, arme connue depuis des millénaires.

La structure des harpes mésopotamiennes et égyptiennes est celle d'un arc ou d'un angle dont l'articulation a été rigidifiée.

Leurs cordes, nombreuses, sont de longueur inégales et se rattachent à la famille moderne des harpes. L'accord se fait en jouant sur la longueur des cordes et la tension intervient peu.

⁴⁰ Dionysos et satyres, coupe attique à figures rouges. Département des monnaies, médailles et antiques de la Bibliothèque nationale de France, Inv. 575. Photo : libre de droits (creative common).



Harpiste, Eshnunna, Mésopotamie, milieu du III^e millénaire⁴¹

Ces instruments sont cités sous le nom de sambuka dans quelques textes grecs, surtout tardifs, mais on trouve la sambuka dans une énumération d'instruments propres à « susciter la volupté » dans les *Politiques* d'Aristote⁴². Ce sont des instruments importés surtout d'Égypte ou du Proche Orient, contrées où on les rencontre depuis deux millénaires.

Les instruments à cadre du Levant : kinnôr, trigone, nebel

Il existe une troisième famille d'instruments à cordes désignée généralement par le terme générique de psaltérions. Cette famille apparaît en diverses régions du Proche Orient vers la fin du II^e millénaire, et on en trouve également en Égypte et en Mésopotamie. Ce sont des instruments à cadre et à cordes de longueurs inégales.

En grec, psaltérion (ψαλτήριον) est forgé à partir de *psallô* qui signifie « effleurer avec les doigts ». Le terme est toutefois assez tardif et semble être introduit par les doctes alexandrins qui ont traduit la Bible en grec, traduction connue sous le nom de *Septante*, dans laquelle on trouve psaltérion une bonne trentaine de fois. On le rencontre également chez les auteurs chrétiens d'Orient des premiers siècles. Il ne faut pas confondre ce psaltérion, mot créé pour les besoins de la rédaction de la *Septante*, avec l'instrument médiéval de même nom, de forme

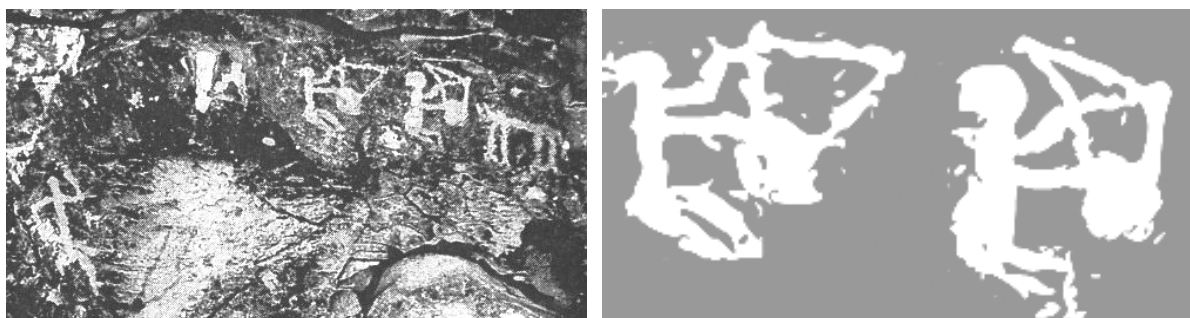
⁴¹Harpiste, relief en terre cuite, début du II^e millénaire av. J.-C. Provenance : Eshnunna. Musée du Louvre. Photo, Marie-Lan Nguyen; domaine public (creative common).

⁴² Aristote, les *Politiques*, VIII, 1341b ; et aussi, toujours en énumération, dans Strabon, Xc, 17 ; *Septante*, Daniel, III, 5 ; Plutarque, *De la monarchie*, ..., 827a ; Athénée, *Deipnosophistes*, IV (7 occ.) et XIV (5 occ.).

trapézoïdale. Le psaltérion hébreu désigne le kinnôr, sorte de lyre asymétrique dont on a quelques représentations datées du II^e millénaire. Le terme, (*kinnârum* en ougaritique et en akkadien) a été hellénisé sous le nom de κινύρα, la kinura.



Lyre de type kinnôr, détail d'un objet en ivoire, Megiddo, vers -1200 av. J.-C.⁴³



Lyres de type kinnôr, dessins sur pierre, Negev, env. 2000 av. J.-C.⁴⁴.



Captifs hébreux jouant du kinnôr – Ninive, vers 700 av. J.-C.⁴⁵.

⁴³ Dessin personnel d'après photo. Musée Rockefeller, Jérusalem.

⁴⁴ Dessin personnel d'après photo..

⁴⁵ Bas-relief, British museum. Illustration tirée de Stainer et Galpin, *The music of the Bible*, 1914, p. 19.

De tels instruments à cadre de forme asymétrique semblent être d'origine anatolienne, on en trouve plusieurs représentées sur le célèbre vase hittite d'Inandik.



Vase d'Inandik (-1600)⁴⁶.

Une fresque du tombeau de Khnoumhotep II datant de la XII^{ème} dynastie (vers 1891 av. J.-C.) montre un groupe d'étrangers venant de Phénicie ou de Canaan, dont l'un joue d'un instrument à cordes de forme rectangulaire :



Ces « étrangers asiatiques », désignés en égyptien sous le nom d'Aamou, pourraient bien être des Phéniciens des Hébreux ou des Bédouins nomades. Cet instrument serait alors un kinnôr de forme non conventionnelle, avec des cordes d'égale longueur. On retrouve cette forme plus tard en Éthiopie, ce qui n'indique pas grand chose, puisque le déplacement culturel a pu se faire dans l'autre sens ; on la retrouve également dans l'instrument irlandais médiéval appelé crwth. Il faut sans doute y voir une simplification de fabrication pour un instrument destiné à voyager.

⁴⁶ Musée des civilisations anatoliennes d'Ankara.

Cette scène est célèbre, mais il faut être prudent quant à son interprétation : elle a été dessinée à la fin du XIX^{ème} siècle dans l'ouvrage de P. E. Newberry, à partir d'un original lui-même dégradé par des traitements de surface antérieurs. Il est fort possible que la forme n'ait pas été fidèlement reproduite⁴⁷.

Le nebel, ou nabla, est cité à plusieurs reprises dans la Bible. Ce serait un instrument d'origine phénicienne, peut-être ougaritique, sachant que *nbl* signifie « vase », « jarre » en phénicien⁴⁸. Il semble que ce soit un instrument à cordes inégales et dont le cadre est triangulaire.

Les instruments à manche et table : pandoura, luths

La quatrième famille rassemble les instruments à manche et à table, sur lesquels la caisse de résonance est parallèle au plan des cordes. On les nomme parfois, improprement, « luths égyptiens ». L'origine de ces instruments est l'Asie centrale où on les rencontre fréquemment de nos jours, sous le nom de « tambûr ». Le raccourcissement de la longueur de corde par la pression des doigts détermine la hauteur du son. Le manche est généralement long et le nombre de cordes varie de deux à quatre.

Les Grecs, avant le III^{ème} siècle, utilisent peu ce genre d'instruments à manche qu'ils ont hellénisé sous le nom de « pandoura ».



Pandoura égyptienne dit « Luth d'Antinoopolis »⁴⁹

Une rare représentation grecque de la pandoura figure entre les mains d'une muse sur un des trois bas-reliefs de Mantinée :

⁴⁷ P. E. Newberry, Beni Hasan I-IV, Londres, 1893-1900, *Memoirs of the Archeological Survey of Egypt*, t. I, pl. XXXI.

⁴⁸ Pierre Chantraine, *Dictionnaire étymologique de la langue grecque*, 1968-1977, p. 732.

⁴⁹ Musée des Beaux-Arts de Grenoble, inv. 2042. Don de la Société Française de fouilles archéologiques en 1907. Cliché Musée de Grenoble.



Avant l'introduction de la pandoura, il n'existe qu'un instrument de ce type chez les Grecs anciens, le monocorde. Sur le monocorde, le blocage de la corde s'effectue au moyen d'un chevalet mobile qu'on déplace le long de la table. Les Pythagoriciens sont les inventeurs de ce monocorde, mais il s'agit davantage d'un instrument de mesure comme on le verra plus loin, que d'un instrument de musique. Pourtant un extrait des *Harmoniques* de Ptolémée, décrit longuement les inconvénients de cet instrument, suggérant ainsi qu'il était en usage chez les musiciens, en tout cas à Alexandrie au II^{ème} siècle de notre ère⁵⁰ :

En ce qui regarde l'usage pratique, cet instrument [le monocorde] occupe le dernier rang et est le plus défectueux que tous les autres, non seulement parce qu'on est obligé de régler l'intonation sur un point et de pincer la corde sur un autre d'une seule main, – de manière que l'on perd les plus beaux effets d'exécution [...] , en effet l'exécutant, n'ayant qu'une seule main à sa disposition, ne peut facilement franchir de grands intervalles, ni toucher simultanément deux points éloignés – mais encore parce que, à cause du déplacement continu du chevalet, on ne cesse d'entendre des sons traînés, d'un effet contre mélodique.

Il est probable que sur un tel instrument, la corde était assez tendue et que la pression du doigt n'était pas suffisante. Par ailleurs, de tels instrument avec chevalet mobile rendait la multiplication des cordes pratiquement impossible⁵¹.

⁵⁰ Ptolémée, *Harmoniques*, II, 12.

⁵¹ Sur ces instruments à cordes avec manche, de type « guitare », voir l'article de Théodore Reinach : « La guitare dans l'art grec », in *Revue des Études Grecques*, t. 8, 1895, p. 371-378.

De la barbarie, selon Platon, des instruments polyharmoniques

Dans la *République*, Platon préconise, pour fonder sa cité idéale, l'abandon de ces instruments polycordes (*Rép.*, III, 399c) :

[...] Nous n'aurons pas besoin, pour nos chants et nos mélodies, d'instruments à cordes nombreuses qui rendent toutes les harmonies.
[...] Nous n'aurons pas à entretenir des facteurs de trigones, de pektis et autres instruments polycordes et polyharmoniques.

Ces instruments polycordes ainsi stigmatisés permettent de jouer les trois genres sur un même instrument, et l'usage du seul diatonique, préconisé par Platon, peut se suffire des huit cordes de la lyre pythagoricienne.

Peu après Platon, Aristote revient sur le sujet en déclarant nettement que ces instruments font partie de l'instrumentarium des Anciens⁵² :

On bannit aussi, plusieurs des anciens instruments, les pektis, les barbitons, et ceux qui n'excitent dans les auditeurs que des idées de volupté, les heptagones, les trigones et les sambuques, [1341b] et tous ceux qui exigent un trop long exercice de la main.



Égyptiennes jouant de la sambuka (à droite) et de la pandoura (au centre)
tombe Nakht, env. XIV^e siècle

⁵² Aristote, *Politique*, VI, 1341a30.



Egyptiennes jouant sur une harpe trigone (à gauche), de la pandoura (au centre) et du tambourin (à droite) – tombe de Rekhmire (XIV^{ème} siècle).

Athénée, qui est incontestablement un témoin indispensable à propos de l'organologie antique, nous décrit comment ces instruments, fort anciens par ailleurs, sont rejetés par les musiciens grecs :

Euphorion, le poète épique, dit, dans son ouvrage sur les Jeux Isthmiques: «Ceux qu'on appelle aujourd'hui Nablistes, Pandouristes, Sambukistes, se servent d'instruments qui n'ont rien de nouveau » (182f) en effet, le barômos, le barbitos, l'un et l'autre cités par Sapho et Anacréon, la magadis, les trigones, les sambuka, sont des instruments anciens. C'est ce que prouve la statue d'une des Muses qu'on peut voir à Mitylène : elle tient une sambuka, ouvrage de Lesbothémis. Mais Aristoxène appelle instruments étrangers (ἐκφυλα ὄργανα), les phoenix, les pektis, les magadis, les sambukas, les trigones, les klepsiambes, les skindapses, et celui qu'on nomme ennéacorde.

Athénée cite ensuite le passage de la *République* de Platon pour corroborer sa description.

Le nationalisme culturel des Grecs de l'Antiquité les a incontestablement privés de la richesse des instruments dits barbares, mais que des millénaires de facture avaient améliorés, tant en Asie Mineure, au Levant, en Mésopotamie qu'en Égypte. La lyre en carapace de tortue, qui a sans doute existé sur les représentations mais qui a été peu jouée, apparaît comme un objet symbolique destiné à marquer le particularisme sophistiqué de la culture grecque au regard de celles des peuples voisins, au même titre que les mythes entretenus par la littérature et la peinture.

Chapitre 2

Le nombre de cordes de la lyre structure l'harmonie

Les textes

Le corpus des ouvrages traitant de la théorie musicale dans l'Antiquité est assez abondant et très redondant. Les *Éléments harmoniques* d'Aristoxène (IV^eme siècle av. J.-C.) en trois livres est le traité le plus ancien et le plus complet sur le sujet. Aristoxène est en opposition avec les Pythagoriciens dont la doctrine musicale a été reprise par Platon, ce qui a contribué à l'importance injustifiée d'un système visant davantage la perfection mathématique que la pratique du musicien. La *Division du Canon*, attribué à Euclide, est un exposé théorique et dogmatique platonicien sur les intervalles. Les *Problèmes* musicaux dits d'Aristote datent sans doute d'un siècle au moins après sa mort et semblent constituer des exercices d'élèves sous forme de questions et de réponses. Plusieurs textes d'auteurs grecs des premiers siècles de notre ère nous apprennent beaucoup sur la théorie musicale ancienne mais doivent être interprétés, compte tenu des siècles séparant leur rédaction des époques considérées. Parmi ceux-ci, les *Harmoniques* de Ptolémée et son *Commentaire* par Porphyre ; le traité *Sur la musique* attribué à Plutarque, de longs extraits provenant d'Athénée de Naucratis, le *Manuel d'harmonique* de Nicomaque de Gérèse, les *Notions utiles pour la lecture de Platon* de Théon de Smyrne, le *Commentaire sur le Timée* de Proclus. D'autres textes d'auteurs parfois inconnus ont été rassemblés au XVII^eme siècle par Meursius puis traduits en latin par Meibom⁵³. Quelques auteurs latins ont également apporté leur contribution, comme Vitruve dans le livre V de son *Traité d'Architecture*, et Boèce dans l'*Institutio Musicae*.

Les textes de Nicomaque de Gérèse, du Pseudo-Plutarque, de Claude Ptolémée, de Porphyre, de Théon de Smyrne ont été écrits au moins sept siècles après la période considérée, et leurs citations de Philolaos, d'Héraclide du Pont, de Glaucos de Rhégium, d'Archytas et d'Aristoxène sont, dans le meilleurs des cas, très lacunaires, et ont été probablement manipulées par nombre de néoplatoniciens pour asseoir leur argumentation quant à la perfection musico-mathématique développée par Platon.

Paul Tannery a montré que les fragments du traité de Philolaos (pythagoricien du V^eme s. av. J.-C.) cités par Nicomaque, Porphyre, Théon et Boèce sont sans doute apocryphes ; il a également mis en doute, rejoint par d'autres chercheurs, l'authenticité de l'attribution à Euclide de la *Division du canon*, ainsi que son unicité d'auteur ; ce texte daterait pour la plus grande part du III^eme siècle avant notre ère. On sait à présent que les *Problèmes* (XI et XIX) dits d'Aristote sont probablement des écrits d'élèves postérieurs au IV^eme siècle av. J.-C.. Six des sept textes édités par Meibom en 1652 sont d'auteurs tardifs,

⁵³ Meibom, *Antiquae musicae auctores septem*, Amsterdam, Elzevir, 1652 ; sept textes d'auteurs sur la musique antique (Aristoxène, Ps-Euclide, Nicomaque de Gérèse, Alypius, Gaudentius, Bacchius l'Ancien, Aristide Quintilien, Marius Capella).

le septième est l'ouvrage d'Aristoxène, les *Éléments harmoniques*, qui constitue finalement le seul ouvrage qui témoigne de la théorie musicale avant le IV^e siècle.

Les origines de la musique grecque

La lecture du traité *De la musique*, qu'on a longtemps attribué à Plutarque, et qui a sans doute été écrit vers le II^e siècle de notre ère, nous apprend beaucoup sur l'histoire de la musique grecque ancienne. L'édition du texte grec, sa traduction et d'abondants commentaires ont été entrepris en 1900 par deux philologues et musicologues, Henri Weill et Théodore Reinach⁵⁴. Les sources de l'auteur inconnu du traité sont Aristoxène, Platon, Aristote, mais surtout Héraclide du Pont auteur d'un ouvrage, aujourd'hui perdu, sur la musique dans la première moitié du IV^e siècle av. J.-C.

Sans remonter avant le VII^e siècle, époque où le mythe et l'histoire se confondent souvent, il semble que la musique grecque archaïque ait connu deux périodes successives, centrée notamment à Sparte où Terpandre, considéré comme l'initiateur de la théorie musicale en Grèce, s'est établi, ainsi que l'expose Th. Reinach :

En gros, la première période correspond aux deux premiers tiers du VII^e siècle, la seconde au dernier tiers du VII^e et au commencement du VI^e. Pendant tout ce temps Sparte fut la capitale musicale de la Grèce et ses grandes fêtes des Carnées d'abord, des Gymnopédies ensuite, le rendez-vous des artistes les plus célèbres.

Les Gymnopédies sont une très ancienne fête lacédémonienne, célébrée en été, en l'honneur d'Apollon ; on y chante notamment des péans, chants de célébration des dieux. Les chanteurs et danseurs exécutent aussi l'hyporchème, chœur accompagné d'une danse mimétique traduisant les paroles par gestes. Les autres types de chants sont les hymnes et les dithyrambes, ceux de Pindare sont restés célèbres. Ces chants et danses sont codifiés et ritualisés même lorsqu'ils ne sont pas dans le domaine religieux.

L'instrument principal dans la musique grecque est la voix. La voix de l'aède, du poète qui déclame les vers en chantant, les voix mêlées des chœurs à l'unisson lors de célébrations ou de fêtes. Ces chants sont accompagnés de deux types d'instruments : les instruments à cordes et les instruments à vent. Les instruments de percussion sont peu présents en Grèce, et nous ne les étudions pas ici.

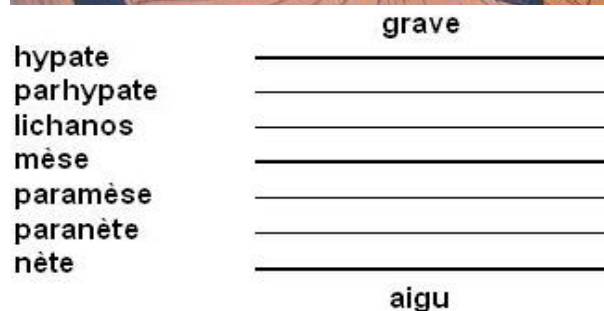
L'élaboration des systèmes musicaux s'est réalisée à partir de la fin du VII^e siècle sur un instrument à cordes, la lyre, dont les cordes sont en nombre variable et de longueurs à peu près égales. L'accord se fait par la tension des cordes, ce qui marque une rupture avec le système des harpes orientales (Mésopotamie, Égypte). Les instruments à

⁵⁴ Plutarque, *Péri mousikè, De la musique*, ed., trad. et comm., H. Weill, Th. Reinach, Leroux, Paris, 1900.

vent (aulos, syrinx) suivent la règle de la longueur déterminant la hauteur des notes. Plusieurs sources anciennes (Strabon, Diodore de Sicile) rapportent que la lyre à sept cordes (heptacorde) a été inventée par Terpandre qui aurait ajouté des cordes à la lyre primitive qu'on appelait phorminx.

Les cordes, et par suite, les degrés des notes, sont regroupées par quatre et forment ainsi le tétracorde, structure de base des systèmes musicaux grecs. Ces tétracordes sont assemblés : conjoints sur les lyres heptacordes) ou, plus tard, disjoints (octocordes). Les noms des cordes indiquent leur position, et ne correspondent pas à une hauteur de son spécifique comme le sont nos notes.

Lorsque les pythagoriciens mathématisent la musique, ils inventent l'octocorde en séparant les deux tétracordes par un intervalle d'un ton. Par ailleurs ils élaborent une mathématique musicale fondée sur les rapports, en mesurant les longueurs de cordes sur un « instrument de mesure » qui ne comporte qu'une corde qu'on peut raccourcir à l'aide d'un chevalet, le monocorde.

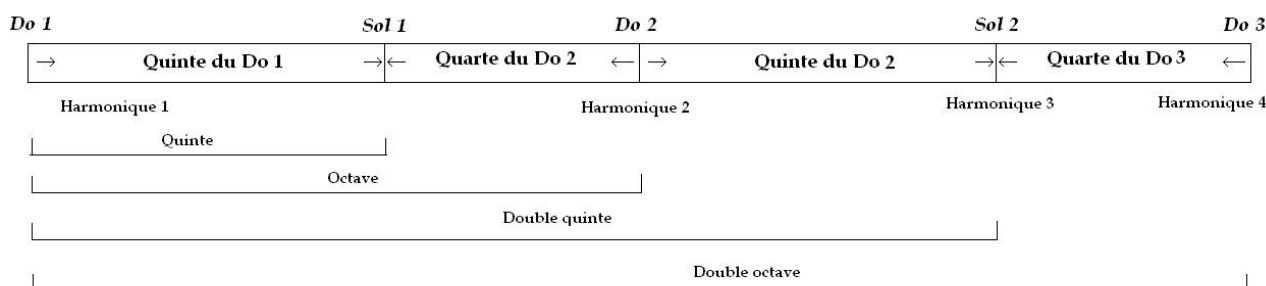


Deux tétracordes conjoints sur une lyre heptacorde, avec les noms des cordes

Les systèmes primitifs décrits par Helmholtz à l'origine des systèmes grecs

Avant d'étudier les différentes hypothèses, il convient de revenir aux sources de l'harmonie, les consonances naturelles d'octave et de quarte (ou quinte).

La musique grecque ancienne se fonde sur les deux intervalles musicaux consonants, octave et quarte (et la quinte qui est une quarte renversée), connus intuitivement depuis longtemps et dans presque toutes les civilisations. Le caractère consonant est apporté par les harmoniques 2 et 3 présents dans la plupart des sons naturels, et qui sont reçus sans agression par l'ouïe⁵⁵. Ces deux consonances sont des réalités physiques et non des conventions culturelles, d'où leur universalité. L'harmonique 2 produit l'octave de la note jouée (sa fréquence est double), et l'harmonique 3 produit la double quinte. L'harmonique 4 produit la double octave et la double quinte précédente se trouve être la quarte grave de la double octave :



Musicalement, la quarte et la quinte sont équivalentes, à une octave près

Dans son ouvrage essentiel sur la perception des consonances, Hermann Helmholtz tente un historique des systèmes grecs en les intégrant dans l'ensemble plus vaste des musiques du monde, asiatiques et gaéliques anciennes, sur lesquelles on a quelques données car elles ont été longtemps pratiquées à l'écart des dogmes de la musique occidentale : nous disposons ainsi des traces de ces traditions préservées⁵⁶.

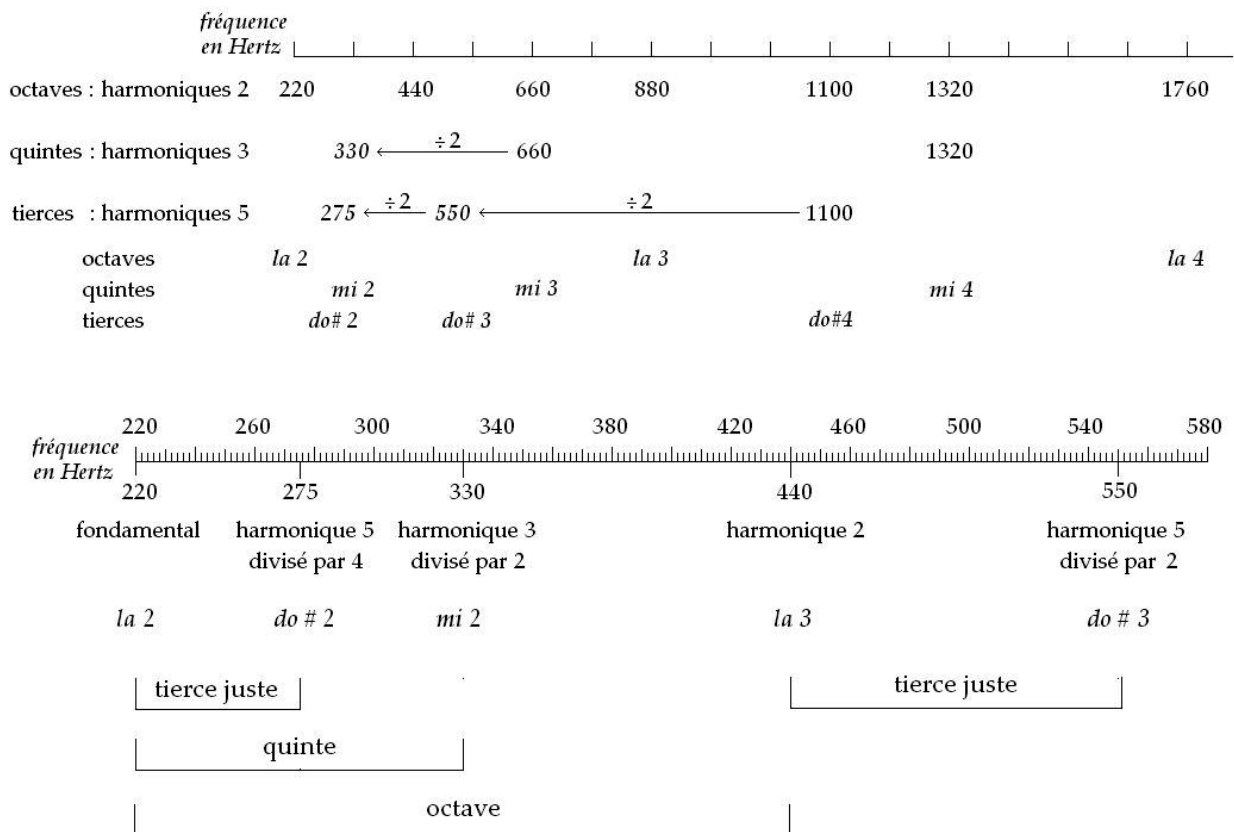
Faute de données exactes sur la période grecque archaïque (avant le Vème siècle), on ne peut s'en remettre qu'au bon sens. Jusqu'au XVIIIème siècle, sauf rares exceptions, les musiciens cherchent les consonances agréables à l'oreille, et nous savons, par les travaux d'Helmholtz, que ces consonances correspondent aux premiers harmoniques (de 2

⁵⁵ Les sons purs ne comprennent que la fréquence fondamentale, et ils sont rares dans la nature. La plupart des sons sont composés d'un mélange de la fondamentale avec des harmoniques (2, 3, 4, 5, ...) qui correspondent, concernant leur fréquence, aux multiples de la fréquence fondamentale. De nombreux sons naturels ou vocaux ont leurs composantes harmoniques 2 et 3 fortement présentes. Les harmoniques pairs sont généralement plus « agréables à l'oreille » que les impairs des rangs élevés. Les harmoniques de rangs impairs supérieurs à 5 (3 = quinte ; 5 = tierce juste) sont moins consonants que les pairs. L'harmonique 7 (proche de la septième mineure), était banni de la musique grecque, et de la musique occidentale jusqu'au XVIIème siècle ; il est maintenant accepté comme consonant. Ce rejet de la septième est une considération d'ordre culturel.

⁵⁶ Hermann Helmholtz, *Théorie physiologique de la musique*, Masson, Paris, 1868, chap. 14.

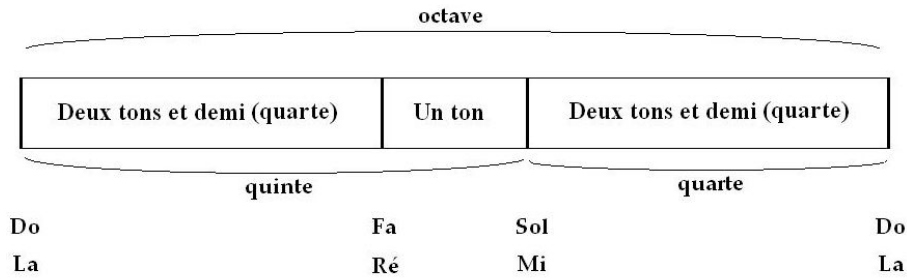
à 6) des sons fondamentaux (les sons qui sont joués). Influencés par le relativisme progressiste des Lumières, les musicologues du XIX^{ème} siècle pensaient que les consonances relevaient de conventions culturelles. Or, l'apport des physiciens, et d'Helmholtz en particulier, a rétabli l'universalité, d'origine naturelle, de ces consonances basée sur la présence des harmoniques dans les sons, quels qu'ils soient. Ces harmoniques déterminent l'octave pour le 2 et ses multiples, la quarte (ou la quinte) pour le 3, la tierce juste pour le 5.

Et voici, pour ceux qui aiment la physique :



La production des intervalles par les harmoniques (en prenant le fondamental à 220 Hz = *la 2*)

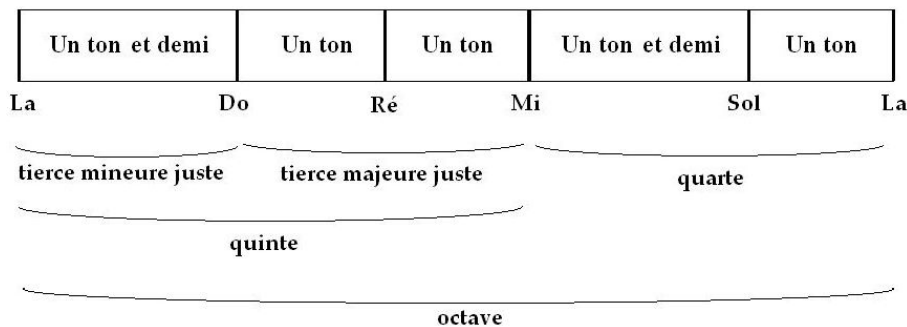
La lyre archaïque à quatre cordes était-elle encadrée par une quarte ou par une octave ? On peut penser dans un premier temps que, comme elle a été peu à peu agrandie au VI^{ème} siècle, elle ne devait couvrir qu'une quarte, c'est la position généralement adoptée. En revanche, l'octave étant la consonance la plus forte, il est difficile de croire qu'elle n'était pas produite par l'instrument. Dans ce cas, les premières lyres (les phorminx) auraient été accordées sur une octave avec les deux cordes intermédiaires qui donnaient la quarte et la quinte (do – fa – sol – do) qui sont les intervalles naturels correspondant à l'harmonique 3.



Système tétracorde archaïque (octave, quinte, quarte)

En ajoutant deux cordes, on parvient à un système pentatonique, sans doute à l'origine de l'harmonie grecque, comme de celle de bien d'autres cultures. C'est l'opinion d'Helmholtz qui poursuit en invoquant la gamme pentatonique chinoise qui a sans aucun doute été pratiquée d'une façon universelle dans une grande partie du monde, non parce qu'elle aurait été importée, mais parce qu'elle est naturelle.

En ajoutant deux cordes au tétracorde archaïque, on fait sonner l'harmonique 3 des deux sons intermédiaires, on introduit la tierce mineure (consonante) et, en jouant sur la tension, la tierce majeure juste correspondant à l'harmonique 5.



Exemple

Système pentatonique (hexacorde)

ébauche de genre diatonique en mode dorien aigu (hypodorien)

Systèmes primitifs à consonances naturelles

Il s'agit d'une hypothèse tout à fait probable d'instrument à quatre cordes primitif tels qu'il a pu exister dans plusieurs civilisations. Ce type a évolué vers le système pentatonique à six cordes tel qu'il existe notamment en Chine.

Ces systèmes ont été pratiqués dans plusieurs civilisations, avec quelques nuances concernant la position des cordes intermédiaires. S'il semble bien établi que ce système pentatonique a existé, nous n'avons aucune source qui nous indiquerait que les Grecs l'ont pratiqué, ce qui supposerait un passage de six à sept cordes qui n'est mentionné nulle part. Ceci reste donc une hypothèse.

La lyre de Terpandre

Aucune source, sauf peut-être Boèce (mais nous savons qu'il faut être prudent avec ses propres sources), ne nous indiquent que les systèmes pentatoniques (à six cordes, donc) ont été utilisés par les Grecs. Cependant, à la lumière des lois naturelles, physiques et physiologiques des consonances, il n'est pas étonnant que ces systèmes aient été employés dans plusieurs cultures qui a priori ne communiquaient pas (chinois, gaëlique). Il n'y a donc aucune raison que les Grecs antérieurs au VII^{ème} siècle ne les aient pas utilisés. En revanche, la spécificité de la musique grecque se manifeste parallèlement à l'approche mathématique de la nature et des spéculations qui l'accompagnent, notamment en Ionie toute proche de Lesbos, la patrie de Terpandre.

Plusieurs sources (Strabon, Plutarque) indiquent que le nombre de cordes a été porté à sept au VII^{ème} siècle par Terpandre⁵⁷. Un fragment d'une déclaration de Terpandre nous a été transmis notamment par Cléonide qui cite Strabon⁵⁸ :

Nous avons dédaigné le chant des quatre sons et ferons retentir de nouveaux hymnes au son de la phorminx aux sept cordes.

Si cet extrait est exact, la lyre primitive comprenait quatre cordes. Cependant, on l'a vu, il est fort probable que les systèmes pentatoniques aient existé auparavant. Mais c'est peut-être Terpandre lui-même qui les avait amenés de sa Lesbos natale, plus proche des cultures asiatiques de la côte ionienne que de celle de Sparte. Acceptons l'idée que les systèmes pentatoniques étaient en usage : dans ce cas, les cordes extrêmes formaient une octave. La corde est alors ajoutée non à l'extrémité comme on le lit souvent, mais à l'intérieur du tétracorde grave. Et on trouve ici l'explication de l'invention, par le même Terpandre, des différents modes, selon la répartition des intervalles au sein des deux tétracordes. Car avec ses sept cordes, la lyre devient un assemblage de deux tétracordes conjoints et inégaux, dont une corde peut être appelée *mèse*, puisqu'elle est au milieu des sept cordes.

Il convient à présent de faire une mise au point. Toutes les représentations des V^{ème} au IV^{ème} siècles (notamment les peintures) montrent des citharèdes jouant sur une lyre à sept cordes bien souvent munie de la légendaire carapace de tortue. On ne peut pas accepter ces représentations comme réalistes. Le passage de la lyre heptacorde à l'octocorde s'est répandu vers la fin du VI^{ème} siècle, et sur des instruments plus solides et résonants que la frêle carapace de tortue de la *chélis* d'Hermès. Il s'agit souvent de représentations d'Apollon ou d'autres personnages dont la fonction est également mythologique, et l'instrument fait partie de l'attirail décoratif qui convient à ces images

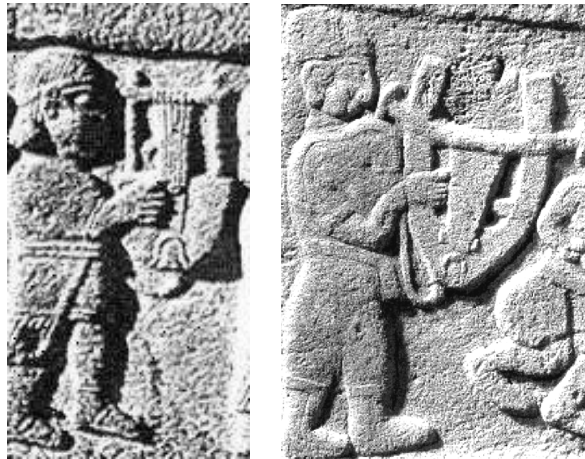
⁵⁷ On ne sait pas exactement quand Terpandre a vécu ; on sait qu'il a gagné un premier concours de musique en 676 et qu'il faisait autorité en matière de musique vers 645 à Sparte.

⁵⁸ Cléonide, *Introduction harmonique*, traduction Ch. -E. Ruelle, in *Annuaire des études grecques*, 1883, p.296. Strabon, *Géographie*, XIII, 2, 4.

avant tout porteuses de symboles. Les instruments en usage étaient probablement des *kithara* dont la caisse de résonance est en bois, sur le modèle des instruments en usage chez les Hittites et les Phéniciens depuis plusieurs siècles, en Asie Mineure et au Levant. L'auteur du traité plutarquien décrit d'ailleurs l'instrument utilisé par les citharèdes du VII^{ème} siècle, selon le témoignage d'Héraclide du Pont (contemporain de Platon)⁵⁹ :

La forme de la kithara fut aussi fixée pour la première fois au temps de Cépion, l'élève de Terpandre ; on l'appela Asiade parce qu'elle était en usage chez les citharèdes de Lesbos, île voisine de l'Asie.

La lyre heptacorde à carapace de tortue est avant tout la marque nationale de la Grèce dont la culture musicale est alors toute récente dans cette région du monde, au regard de celles de l'Égypte et de la Mésopotamie.



Lyres ou kitharas Hittites, Karatepe (-IX^e s.)

Éléments de l'harmonie grecque

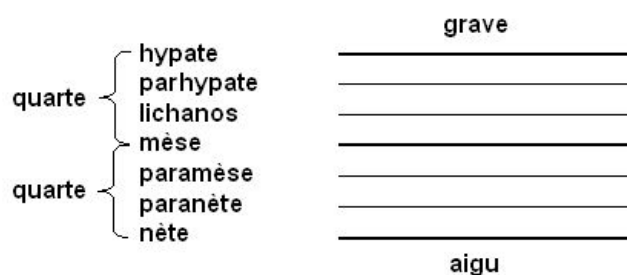
Les représentations de la hauteur du son

Pour aborder la musique grecque ancienne, il est nécessaire de faire un apprentissage sur les représentations de la hauteur du son, dans l'Antiquité grecque puis à partir de l'époque moderne.

Lorsqu'on évoque un intervalle, de la Renaissance jusqu'à nos jours, on le définit toujours par la note de référence, la tonique, note grave, et une note située *plus haut* que la tonique ; c'est à dire qu'un intervalle est toujours supposé *montant* : le degré défini par la

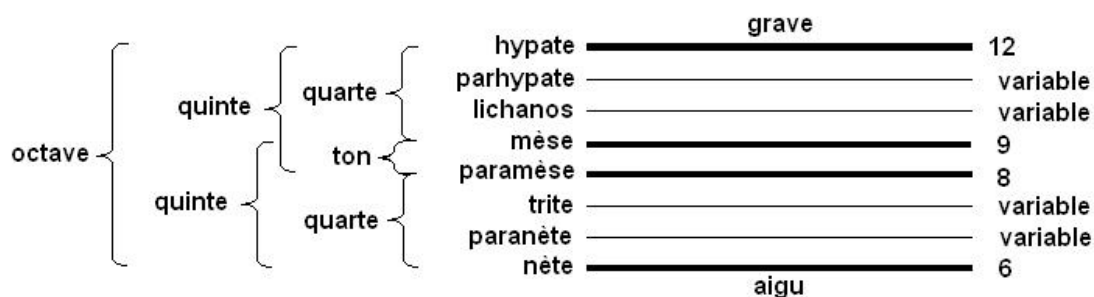
⁵⁹ Ps-Plutarque, *De la musique*, IV, 70-71, *De la musique*, édition critique et explicative par Th. Reinach et H. Weill, Leroux, Paris, 1900.

quinte du *do*, c'est un *sol* plus aigu. Chez les grecs, c'est le contraire. Le degré de référence, c'est la note aiguë, la *nète* ; l'intervalle d'octave est représenté vers le grave, et l'intervalle de quarte se détermine également vers le grave. La quarte descendante de la *nète* (aiguë) atteint le degré de la quinte montante de l'*hypate* (grave). Il faut se familiariser avec cette gymnastique pour comprendre les systèmes grecs. On note que, en acoustique musicale, la quinte est équivalente à la quarte, selon que la référence est la note aiguë ou grave.



Heptacorde de Terpandre
deux tétracordes conjoints
chaque tétracorde couvre une quarte
l'heptacorde ne couvre pas une octave

Au temps de Pythagore (fin du VI^{ème} siècle), les quatre cordes fixes de la lyre octocorde sont représentées par la série 6, 8, 9, 12 ; on affecte le nombre 6 à la corde aiguë (la *nète*), et le 12 à l'*hypate*, corde grave ; c'est logique puisque ces nombres correspondent aux longueurs de corde *mesurées sur le monocorde*, sorte d'instrument de mesure pythagoricien qui sert à déterminer les intervalles par la longueur du segment de corde.



Octocorde pythagoricien
deux tétracordes disjoints séparés par un ton
l'octocorde couvre une octave

En revanche, dès le IV^{ème} siècle av. J.-C., la représentation numérique est déconnectée de la géométrie, et on attribue alors les nombres élevés aux sons aigus. Si Archytas (début du IV^{ème} s.) emploie encore l'ancienne représentation (fragment cité par Ptolémée, DK 47 A16), peu après lui, l'auteur de la *Division du Canon* adopte la nouvelle,

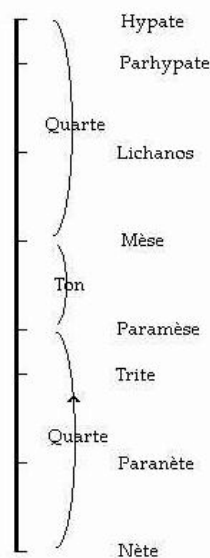
notamment dans la proposition X⁶⁰. Lorsque, cinq siècles plus tard, dans le *Sur la musique* plutarquien, l'auteur décrit le système platonicien hérité des Pythagoriciens en invoquant la fameuse série 6, 8, 9, 12, il inverse la série en affectant le nombre 12 à l'aigu et le 6 au grave⁶¹.

Par ailleurs, pour compliquer encore, tandis que les conventions de représentations modernes nous disent que lorsque le son est aigu, il est *haut* et le grave *bas*, chez les Anciens grecs, c'est le contraire. C'est pourquoi, sur les figures de cette étude, le grave est positionné vers le haut ; en revanche, pour ne pas trop dérouter, lorsque la représentation est horizontale, le grave a été placé à gauche, comme sur un piano.

⁶⁰ Paul Tannery, « La division du canon », in REG 1883, p. 311 ; Karl von Jan, *Musici scriptores graeci*, 1895, p. 158 ; André Barbera, *The Euclidean division of the canon*, 1991, p. 272..

⁶¹ Plutarque, *Sur la musique*, ed. et trad. Weill et Reinach, Paris, 1900, 215, p.90-91.

Grave



*Représentation grecque ancienne
de deux tétracordes disjoints
(séparés par un ton)*

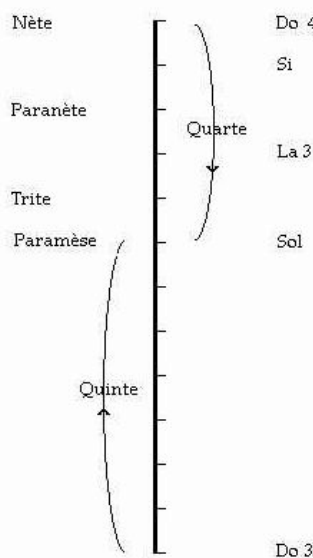
La quarte est visuellement 'montante', mais musicalement 'descendante' (vers le grave)

Plus la corde est longue vers le haut, plus le son est grave

La quarte s'exprime par le rapport $4/3$ de la longueur de corde qui produit le son de la nète (la quinte = $3/2$, l'octave = 2)

Au sein de l'octave, les rapports exprimant les intervalles sont compris entre 1 et 2.

Aigu



*Représentation intermédiaire :
Comment la quarte ancienne devient notre
quinte moderne*

Cette représentation n'a pas existé, elle est proposée pour faciliter la visualisation de la transformation d'une quarte en quinte

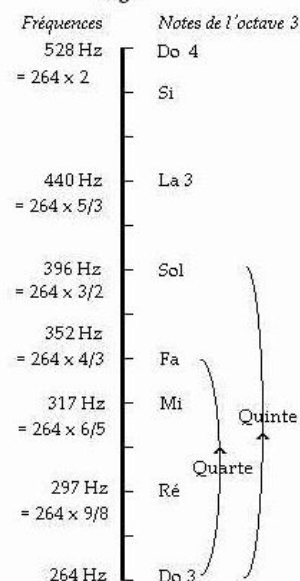
Le grave est en bas

La quarte est 'descendante' et forme une quinte 'montante'

Le degré (la note) atteint par une quarte 'descendante' est le même que celui d'une quinte 'montante' de l'octave grave.

On dit que la quinte est le renversement de la quarte

Aigu



*Représentation moderne
des intervalles pythagoriciens*

Le grave est en bas
La quarte et la quinte sont 'montantes'

La quarte s'exprime par les $3/4$ de la longueur de la corde qui produit le son Do 3 (tonique) (la quinte = $2/3$, l'octave = $1/2$).

Mais la quarte s'exprime par $4/3$ de la fréquence du son Do 3 (la quinte = $3/2$, l'octave = 2)

Le son du fa 3, qui forme une quarte à partir du do 3 a donc une fréquence de $264 \times 4/3 = 352 \text{ Hz}$

Les rapports qui définissent les intervalles sont donc les mêmes dans la représentation ancienne (rapports de longueurs de cordes à partir de la plus aiguë) que dans la représentation physique (rapports de fréquences). Ces rapports, dans une octave, ont une valeur numérique comprise entre 1 et 2.

Le passage de la représentation grecque ancienne à la représentation moderne

Rapports d'intervalles

Jusqu'au Vème siècle, les intervalles étaient désignés par leur nom, ils étaient consonants et il y en avait principalement deux sur la lyre heptacorde : l'octave et la quarte. On peut se référer à Philolaos, pythagoricien du Vème siècle qui adoptait volontiers le vocabulaire ancien, pour retrouver ces dénominations : l'« harmonie » (ἁρμονία) désigne l'octave, en référence à la juste proportion, et la quarte est la « syllabe » (συλλαβή) qui évoque l'idée d'encadrement caractéristique de l'intervalle (du verbe συλλαμβάνω, *sullambanô*, qui signifie « contenir », « embrasser », « prendre ensemble »).

Plus tard, lorsque, avec l'apparition de l'octocorde pythagoricien (deux tétracordes séparés par un intervalle d'un ton), l'intervalle de quinte prend toute sa place, les termes changent. L'octave encadre la totalité de l'octocorde, ce sera τὸ διὰ πασῶν, *dia-pason* (« [intervalle défini] au moyen de la totalité »). La quarte se nomme διὰ τεσσάρων, *diatessaron* (« [intervalle défini] au moyen de quatre [cordes] ») et la quinte διὰ πέντε, *diapente* (« [intervalle défini] au moyen de cinq [cordes] »).

Les rapports d'intervalles des Pythagoriciens sont toujours supérieurs à 1 : ils expriment des longueurs de corde, en prenant comme unité la longueur qui produit la note aiguë, la *nète* ; les sons plus graves sont produits par des cordes plus longues, donc leurs nombres, analogues aux longueurs, sont supérieurs à 1, et inférieurs à 2 qui correspond à l'octave grave (de longueur double) de la *nète*. En effet, sur le monocorde, les Pythagoriciens, déterminaient les intervalles, non en partant d'une corde à vide et en la raccourcissant comme sur un violon ou une guitare, mais en partant du degré aigu (*nète*) correspondant au milieu de la corde, et en allongeant la corde jusqu'à sa totalité.

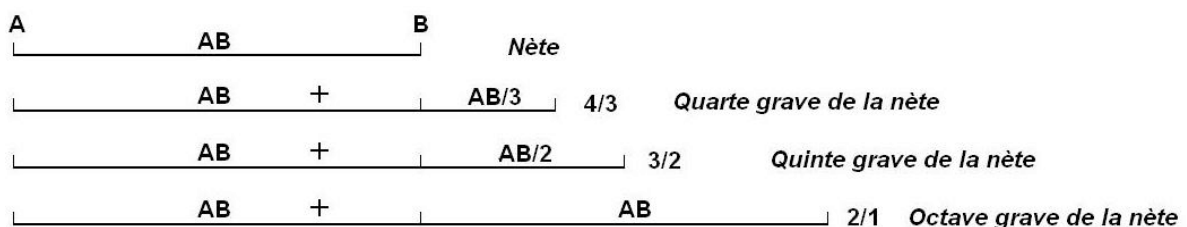
Lorsque les Pythagoriciens interviennent dans le champ musical, l'étude des intervalles est l'occasion d'aborder le calcul sur les rapports et les proportions. Un nouveau vocabulaire se crée.

2/1, donc 2, pour l'octave (*diapason*) de rapport double, τὸ διπλοῦν, *to diploun*.

3/2 pour la quinte (*diapente*) de rapport hémiole, τὸ ἡμιόλιον, *to hamiolon*.

4/3 pour la quarte (*diatessaron*) de rapport épitrète, τὸ ἐπίτριτον, *to epitriton*.

On remarque que ces rapports sont de la forme : $1 + (1/n)$. Les Anciens leur ont donné le nom d'*épimore* pour exprimer qu'ils sont constitués de l'unité à laquelle on ajoute une partie d'elle-même (*épi* = au dessus ; *mora* = partie). Ces rapports constituent le socle de l'harmonie pythagoricienne car ils expriment les rapports des intervalles consonants. Lors de l'élaboration de l'octocorde, les Pythagoriciens insèrent un intervalle entre les deux tétracordes, le ton majeur de rapport 9/8. Quoique épimore, cet intervalle n'est pas consonant ; Aristoxène dira que le plus petit intervalle consonant est la quarte.



Construction des intervalles au moyen des rapports épimores ($1 + 1/n$)

La division du tétracorde : les trois genres

Le module de base dans la musique grecque est le tétracorde. Un assemblage de deux tétracordes forme un heptacorde lorsque la corde médiane (*mèse*) est commune, et un octocorde lorsqu'il existe un intervalle entre les deux tétracordes ; dans le premier cas on parle de tétracordes conjoints, disjoints dans le second.

Les deux cordes extérieures du tétracorde sont fixes, ses degrés (les notes) sont fixés une fois pour toutes, et chaque tétracorde couvre une quarte. Les deux cordes intérieures sont dites mobiles, on les accorde selon l'atmosphère désirée par le musicien. Cette façon d'organiser les deux cordes mobiles et donc les trois intervalles qu'elles délimitent déterminent les genres.

L'histoire indique que jusqu'au V^eme siècle av. J.-C., on connaissait trois genres. Toutefois, dès que les mathématiciens se sont emparés de la musique, ils se sont régalés à créer de nouveaux genres en déterminant des rapports d'intervalle de plus en plus sophistiqués. Paul Tannery a recensé une trentaine de genres différents créés par les mathématiciens entre le IV^eme siècle av. J.-C. et le II^eme siècle de notre ère⁶².

Le tétracorde est divisé selon trois genres principaux avec des variantes. On lit, dans le premier livre des *Éléments harmoniques* d'Aristoxène (contemporain d'Aristote, seconde moitié du IV^eme siècle)⁶³ :

On peut établir que le genre diatonique est le premier et le plus ancien; c'est en effet celui que la nature de la voix de l'homme trouve tout d'abord. Le second est le chromatique. Le troisième, supérieur aux deux autres, est l'enharmonique ; car il est venu en dernier et l'oreille ne s'y accoutume qu'avec beaucoup de peine.

Le genre diatonique, le plus ancien, est également le plus proche de notre harmonie moderne ; le tétracorde (une quarte) est constitué (en partant de l'aigu) de deux tons consécutifs et d'un demi-ton, comme nos quartes descendantes *la-mi* et *mi-si*.

Le genre chromatique présente un intervalle aigu d'environ un ton et demi, et deux intervalles plus graves, dont l'assemblage, dénommé *pycnon*, couvre un ton.

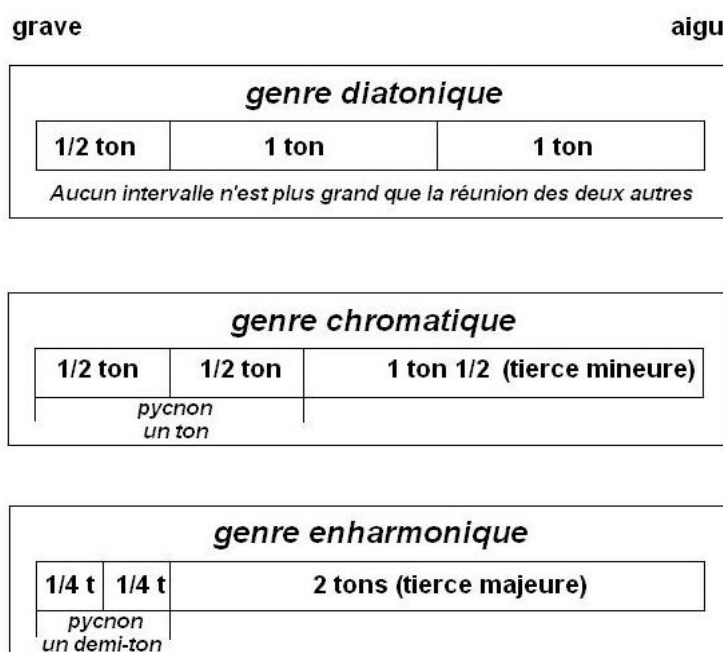
Le genre enharmonique se compose d'un grand intervalle aigu d'environ deux tons, et d'un *pycnon* de deux micro-intervalles couvrant, à eux deux, un demi-ton.

⁶² Paul Tannery, « Sur les intervalles de la musique grecque », in *Revue des études grecques*, 1902, t 15, p. 336-352. Voir en annexe un tableau résumé.

⁶³ Aristoxène, *Éléments harmoniques*, Traduction et notes de Ch.-Émile Ruelle, Paris, Pottier de Lalaine, 1871, 63.

Les intervalles formant le pycnon ne sont pas forcément égaux, ce qui donne tout son agrément à la théorie.

Dans le genre diatonique, équilibré, aucun intervalle n'est plus grand que l'assemblage des deux autres. Dans le chromatique, le pycnon est contenu une à deux fois dans le grand intervalle, pas plus, et dans l'enharmonique plus de deux fois.



Exemples de genres utilisés pour accorder les tétracordes

Ces divisions sont ici simplifiées et ont varié en fonction des recherches entreprises par les mathématiciens grecs à partir du IV^{ème} siècle.

Le genre diatonique est le plus archaïque, sans doute ne parlait-on même pas de genre avant le VI^{ème} siècle. Cependant les usages changent, et, dès l'apparition de l'octocorde, au V^{ème} siècle, c'est le genre enharmonique qui domine, ainsi que le souligne Aristoxène pour qui ces musiciens du siècle précédent sont « anciens » :

Il faut établir aussi que les musiciens antérieurs voulaient être seulement harmoniciens. En effet, ils ne s'occupaient que du genre enharmonique et ne considéraient aucunement les deux autres ; la preuve, c'est que, chez eux, les diagrammes ne sont composés que de systèmes enharmoniques ; pour les diatoniques et les chromatiques, personne ne les a jamais vu [exposer]. Toutefois leurs diagrammes indiquaient la marche entière de la mélodie ; mais ils ne contenaient que des systèmes octocordes enharmoniques : quant aux autres genres, aux autres formes [d'intervalles] qui se rencontrent dans l'enharmonique et dans les autres genres, personne n'a cherché à les approfondir. Au contraire, ils détachaient dans la mélodie

tout entière un seul genre qui en forme la troisième partie, et une seule grandeur, le diapason ou l'octave, qui devenait l'objet exclusif de leurs traités.

Dans un passage extrait du traité de musique écrit par un Byzantin du XIII^{ème} siècle, Georges Pachymères on trouve un résumé des six genres décrits par Aristoxène dans les *Éléments harmoniques*⁶⁴ :

Aristoxène s'exprime donc (à peu près) en ces termes : « Chacun des tétracordes se divise en six genres. L'un est celui qu'on appelle harmonie ou genre enharmonique ; il emploie le diésis minime, lequel vaut un quart de ton. Trois genres sont chromatiques ; ils emploient, le plus grave, le diésis chromatique proprement dit, qui vaut un tiers de ton ; le moyen, un autre diésis appelé sesquialtère, car son intervalle consiste dans un diésis enharmonique et demi. Le troisième est le chromatique synton ou aigu, lequel consiste dans un demi-ton et non plus un diésis. Jusqu'à ce genre, le pycnum subsiste, car jusqu'à ce genre un intervalle unique est supérieur aux deux autres (d'un tétracorde). À partir de ce genre, le [reste du] tétracorde se divise en (deux intervalles) égaux, car les deux genres qui restent sont l'un et l'autre diatoniques. Ainsi dans le genre relâché [diatonique mol], comme on l'a dit, le tétracorde est divisé en deux intervalles égaux par le plus aigu des sons mobiles ; car l'intervalle (compris) par exemple entre l'*hypate* des moyennes et l'indicatrice [la *lichanos*] est égal à l'(intervalle compris) entre l'indicatrice et la *mèse*, circonstance qui ne se rencontrait dans aucun des genres précédents ; et c'est pour cela que le pycnum pouvait y subsister. Dans le dernier genre appelé genre diatonique proprement dit et genre diatonique synton ou aigu, l'indicatrice est encore plus aiguë de manière qu'il n'y a qu'un intervalle tonié de cette indicatrice à la *mèse*. Voilà ce que dit Aristoxène.

Aristoxène se réclame à la fois des mathématiciens à qui il emprunte la formulation des intervalles par des rapports complexes, mais également des « harmoniciens » pour qui c'est l'oreille qui reste seule juge de l'harmonie.

⁶⁴ Traduction de Ch. E. Ruelle, in *Éléments harmoniques d'Aristoxène*, Lalaine, Paris, 1871, appendice 5, p. 120.

	Mi	Fa	Sol	La		
	Si	Do	Ré	Mi		
	0	100	200	300	400	500
Tempérament égal (moderne)	demi-ton $\frac{12}{\sqrt{2}}$	ton $\frac{6}{\sqrt{2}}$		ton $\frac{6}{\sqrt{2}}$		
Diatonique 'syntone'	demi-ton	ton		ton		
Diatonique 'mol'	demi-ton	3/4 de ton		ton + 1/4 de ton		
Chromatique 'tonié'	demi-ton	demi-ton	ton et demi			
Chromatique 'mol propre'	1/3 de ton	1/3 de ton	ton + 5/6 de ton			
Chromatique 'hémiole'	3/4 de ton		ton + 3/4 de ton			
Enharmonique	1/4 de ton	1/4 de ton	diton tempéré			

Tétracordes d'Aristoxène

Pour Platon, il n'existe qu'un genre acceptable, c'est le diatonique : il considère qu'il s'agit du seul genre réellement grec, les autres, plus « relâchés » étant une marque de dégénérescence de la musique grecque apportée par les barbares. Les genres chromatique et enharmonique ont été importés d'Asie proche orientale par Olympos au VI^{ème} siècle⁶⁵. On retrouve d'ailleurs la trace des genres chromatiques et enharmoniques dans la musique arabe et indienne, tandis que la musique occidentale naissante, imprégnée du platonisme ambiant des premiers siècles de notre ère, s'est centrée exclusivement sur le genre diatonique avec ses tons et demi-tons.

Par ailleurs, la perfection mathématique qu'il inculque dans son enseignement amène Platon à refuser la tierce juste. En effet, le rapport de la tierce juste ($\frac{5}{4}$) n'est pas déterminé par des multiples de 2 et 3, dogme prescrit dans *Timée*⁶⁶. Platon, comme les Pythagoriciens, ne reconnaît que le ton ($\frac{9}{8}$). La partie aiguë du tétracorde est donc composée d'un diton, intervalle non consonant, dont le rapport est de $\frac{9}{8} \times \frac{9}{8}$ ou $\frac{81}{64}$, tandis que la tierce juste est de rapport $\frac{5}{4}$ (ou $\frac{80}{64}$).

	Mi	Fa	Sol	La
	Si	Do	Ré	Mi
Diatonique 'syntone' de Platon	limma $\frac{256}{243}$		ton majeur $\frac{9}{8}$	ton majeur $\frac{9}{8}$
	dison ($\frac{81}{64}$) : tierce de Platon (dissonante)			
	tierce juste $\frac{5}{4}$ (ou $\frac{80}{64}$) (harmonique 5)			
comma syntone (zarlinien) = $\frac{81}{80}$	→ 			

Tétracorde diatonique de Platon (*Timée*) (diatonique de Platon dit 'pythagoricien')

⁶⁵ Il a existé plusieurs Olympos musiciens, au moins deux, à des époques différentes. Celui-ci est le plus récent. Le plus ancien aurait été l'inventeur de l'aulos avec Marsyas et Hyagnis sans qu'on sache bien les situer chronologiquement.

⁶⁶ Platon, *Timée*, 35b-36b.

Mise au point sur les petits intervalles

Tout d'abord, la musique grecque ancienne est monodique, il n'y a pas de polyphonie ni même d'accords. Les notes sont jouées successivement. Sans doute l'usage s'est répandu, à partir du IV^{ème} s. de formations de plusieurs musiciens jouant en accord, mais nous n'en avons pas d'indication. Si on voit, sur des représentations, des *auloi* doubles, il ne s'agit pas, comme l'a souligné Annie Bélis, de jouer en accord : les espacements entre trous dans les genres enharmoniques et chromatiques auraient été trop petits pour être supportés par la structure du bois. Les aulètes jouaient donc alternativement sur les deux *auloi*.

Selon Aristoxène, en accord avec le bon sens des audiophiles, le quart de ton est le plus petit intervalle discernable. Par ailleurs, comme il le précise, on ne peut pas en chanter plus de deux consécutifs. Ce qui exclut toutes les spéculations sur les commas (pythagoricien ou zarlinien), schisma et autre diaschisma, qui ne constituent que des satisfactions intellectuelles pour le mathématicien, mais n'ont aucune utilité pratique pour le musicien.

Le chanteur et tous les instrumentistes, même si les notes sont fixes comme sur les *auloi*, parviennent à corriger les légers décalages lorsqu'ils sont à l'unisson. Les seuls instruments sur lesquels les micro-intervalles sont perceptibles sont les orgues, d'apparition tardive, qu'on ne peut pas tempérer de façon pratique. L'effet produit est bien connu des acousticiens : lorsque deux sons de fréquences très proches sont perçus simultanément, on distingue un battement (dont la fréquence est la différence des fréquences des deux sons) qui peut être gênant, mais seulement lorsque les sons durent plus d'une seconde. Mais justement, les musiciens grecs ne percevaient pas ces battements puisque leur jeu était monodique.

Voici ce qu'écrit un théoricien de la musique byzantin du haut Moyen Âge, Bacchius l'Ancien⁶⁷ :

Que l'on donne une lyre à accorder à un musicien virtuose, et qu'ensuite on la porte à accorder à un autre : il sera impossible de juger par l'audition, tant la différence sera petite, si le second musicien a tendu ou relâché les cordes.

D'autre part il existe des intervalles physiquement naturels, qui correspondent aux harmoniques du son fondamental (2 pour l'octave, 3 pour la quarte et la quinte, 4 pour la double octave, 5 pour la double tierce, etc.). Les harmoniciens issus du pythagorisme, et surtout les platoniciens, semblent ignorer la tierce naturelle ($5/4$, ou $80/64$) qu'ils

⁶⁷ Vincent, Alexandre-Joseph-Hidulphe, *Notice sur divers manuscrits grecs relatifs à la musique*, formant le t. XVI-2 des *Notices et extraits des manuscrits de la Bibliothèque du roi et autres bibliothèques*, Impr. Roy., Paris, 1847, p.66.

remplacent par le diton (deux tons de $9/8$, soit $81/64$). La différence constitue le comma zarlinien ou syntonique ($81/80$). Or, ce comma est tout à fait perceptible, sous forme de battements, dans un accord ou même un unisson de deux instruments accordés différemment. Cependant, même si personne n'a voulu l'écrire, il est naturel que les musiciens, qu'ils soient de l'Antiquité ou de la Renaissance, « attrapent » forcément la tierce juste car elle répond à la sensation grâce à loi physique de l'harmonique 5. C'est d'ailleurs le parti pris d'Archytas, et sans le dire, d'Aristoxène qui préconise un diton « tempéré » et proche de la tierce juste. Cette problématique de la tierce a encombré toute l'histoire de la musique occidentale jusqu'au XIX^{ème} siècle. Paul Tannery défend vigoureusement cette position dans un article posthume paru en 1911 : « Sur le spondiasme dans la musique grecque ».

Depuis le XIX^{ème} siècle on a adopté le tempérament égal, ce qui fait que tous les intervalles sont faux, mais d'une façon imperceptible, et tout le monde s'en satisfait, en tout cas les musiciens (il existe quelques mélomanes délicats qui ont l'oreille si fine que cela leur est insupportable, etc.⁶⁸). Et bien entendu, quelques compositeurs de musique contemporaine se sont engouffré dans le créneau des micro-intervalles, surtout avec l'arrivée des instruments électroniques qui ont fait le bonheur des musico-mathématiciens il y a quelques années.

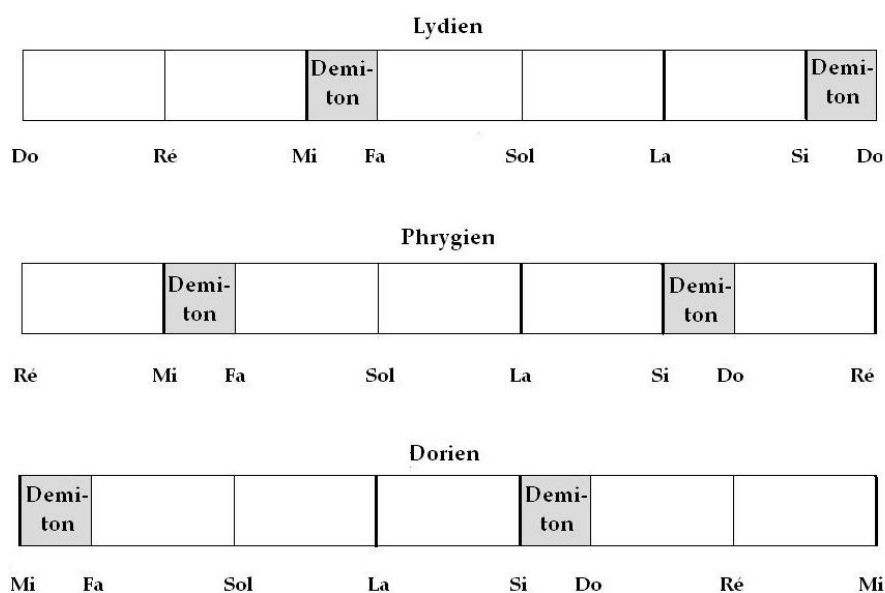
Modes musicaux grecs anciens

Parmi les notions rencontrées dans la science de l'harmonie, on lit souvent que telle musique est jouée en mode phrygien, éolien, lydien ou myxolydien. Pour simplifier, les modes déterminent la place des demi-tons dans l'échelle harmonique, ou, si l'on veut, sur quelle note commence la gamme.

De la Grèce ancienne à la Renaissance, il en a coexisté de nombreux et toute une littérature technique médiévale traite de l'emploi des modes en musique. La musique occidentale moderne, dès le XVII^{ème} siècle, est dite tonale : elle a retenu deux modes, le majeur et le mineur.

Dans l'harmonie grecque ancienne, il existe trois modes principaux : le dorien, le phrygien, le lydien. Chaque mode présente des caractères musicaux qui ont beaucoup fait écrire les commentateurs. C'est ainsi que Platon décrit le dorien comme l'harmonie virile par excellence et le lydien comme efféminé (*République*, III, 399a) ; Aristote renchérit en laissant le lydien aux vieillards et aux enfants (*Politique*, VII, 1342). Le mode phrygien est considéré comme dramatique. Par la suite, on a ajouté les modes aigus dont le nom se construit avec le préfixe *hypo*, en raison de la représentation spatiale des grecs anciens qui placent l'aigu vers le bas. Deux modes graves complètent la série, le myxolydien et le locrien.

⁶⁸ Cet agacement n'engage que moi...(je suis également musicien et mélomane).



Les trois modes grecs anciens
Le genre est le diatonique (1/2 ton - 1 ton - 1 ton)

Il convient de noter que les appellations anciennes (lydien, phrygien, dorien) ont été mal comprises au Moyen Âge (notamment par Boèce) et ont donc été mal transcrites. Ces dénominations ne correspondent pas aux appellations rencontrées dans les traités de musique de la Renaissance jusqu'au XIX^e siècle (par exemple, le lydien grec est dénommé ionien, et les phrygien et dorien sont inversés). On préfère, de nos jours, les désigner par la note finale de la gamme (mode de do pour le lydien grec, etc.).

Les tétracordes conjoints de la lyre heptacorde

Les cordes de la lyre d'Hermès, la *chélys*, archétype des lyres du V^e siècle, sont d'égales longueurs, l'accord se fait en jouant sur la grosseur des cordes et sur leur tension. La légende dit qu'elles sont au nombre de sept. Toutefois plusieurs sources indiquent que la lyre primitive, sans doute la *phorminx*, n'en comptait que trois ou quatre. C'est ainsi que Diodore de Sicile nous apprend que la lyre primitive n'avait que trois cordes⁶⁹ :

Il [Hermès] imagina la lyre à trois cordes, par allusion aux trois saisons de l'année ; ces trois cordes rendent trois sons, l'aigu, le grave et le moyen.
L'aigu, répond à l'été, le grave à l'hiver, et le moyen au printemps.

Il n'y avait que trois saisons en Grèce, à cette époque. On rapporte aussi que les magistrats de Sparte ont coupé les cordes d'un nouvel instrument à sept cordes inventé par Terpandre. Ce même Terpandre, devenu célèbre chez les historiens de la musique, est

⁶⁹ Diodore de Sicile, *Bibliothèque historique*, I, 16.

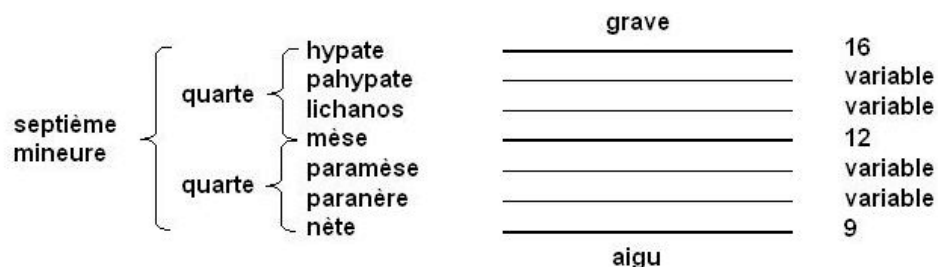
généralement considéré comme l'inventeur de la lyre à sept cordes, ainsi que le rapporte Strabon qui cite le musicien⁷⁰ :

Un autre citharède fameux, Terpandre, était, paraît-il, originaire de Lesbos : c'est lui qui passe pour avoir délaissé le premier la lyre tétracorde et fait usage de la lyre à sept cordes, comme l'attestent les vers suivants qui lui sont attribués : « Pour te plaire, {ô déesse !} nous renoncerons désormais aux accents de notre lyre tétracorde et ne chanterons plus tes louanges qu'en nous accompagnant des sept cordes de la lyre nouvelle».

La lyre archaïque (avant le VI^{ème} siècle), ou *phorminx*, dispose donc de quatre cordes, d'où le nom de tétracorde qui sera l'élément de base des systèmes musicaux grecs. Nous n'en connaissons pas grand chose, toutes les représentations disponibles datent du VI^{ème} et V^{ème} siècles, et montrent des lyres heptacordes.

Il semble bien que le nombre de cordes, fixé à sept, ait eu une grande importance jusqu'au V^{ème} siècle av. J.-C., époque à laquelle l'usage de la lyre octocorde se répand. On a évoqué une raison d'ordre mystique, le sept étant un nombre aux propriétés magiques, ce qui n'est pas impossible.

L'accord de la lyre heptacorde est variable. On considère généralement que l'étendue est composée de deux tétracordes égaux chacun à une quarte. Les trois degrés délimitant les tétracordes sont fixes.



Heptacorde de Terpandre
deux tétracordes conjoints
chaque tétracorde couvre une quarte
l'heptacorde ne couvre pas une octave

Les Pythagoriciens ajoutent une huitième corde et c'est une rupture importante sur le plan de la théorie harmonique, on le verra⁷¹. Par la suite, au cours du V^{ème} siècle, on ajoute encore des cordes dans le but d'accroître la tessiture, pour atteindre, au IV^{ème} siècle av. J.-C., quinze cordes couvrant deux octaves sur quatre tétracordes (voir la *Division du canon*).

⁷⁰ Strabon, *Géographie*, XIII, 2, 4.

⁷¹ Selon le témoignage de Philolaos cité par Nicomaque de Gêrase repris par les néo-pythagoriciens des premiers siècles, et constamment répété par les musicologues du XIX^e siècle (Nicomaque de Gêrase, *Manuel d'harmonique*, 5).

Dans un fragment attribué à Nicomaque de Gêrase mais probablement écrit après lui, vers le II^e siècle de notre ère, on lit⁷² :

Tous ceux qui ont adjoint d'autres cordes à la huitième ont été guidés non par une raison quelconque, mais par le désir de gagner l'âme de leurs auditeurs. C'est ainsi que la neuvième corde fut ajoutée par Théophraste de Piérie, la dixième par Histiée de Colophon, la onzième par Timothée de Milet, et les suivantes par d'autres encore. Plus tard, le nombre des cordes fut porté à 18. [...]. Les cordes sont en tout, dans les trois genres, au nombre de 28. Il n'y en a ni plus ni moins, car la voix humaine ne peut admettre, ni dans le grave, des sons plus graves, sans arriver au son de la trompe et au bruit de la toux, sons insignifiants, inarticulés et non mélodieux ; ni dans l'aigu, les sons qui ressemblent aux mugissements des bœufs ou aux hurlements du loup, lesquels sont inappréciables, discordants et ne peuvent participer à une consonance.

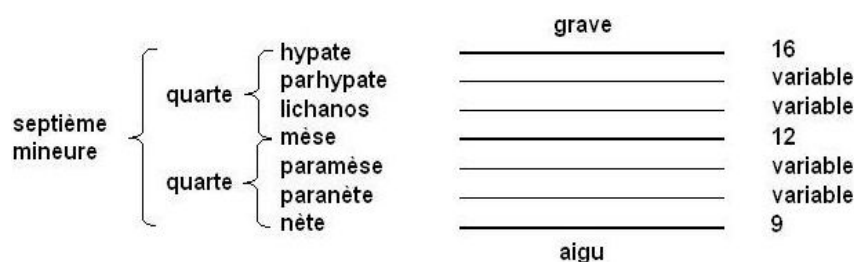
L'accord des deux tétracordes de l'heptacorde : octave ou septième ?

En dépit d'une littérature philologique, musicologique et critique abondante depuis le XIX^e siècle, il faut bien reconnaître que nous ne savons pas grand chose de la manière dont les Grecs accordaient leur lyre avant le IV^e siècle av. J-C.

En recoupant les textes, notamment ceux d'Aristoxène, de ps-Plutarque et de Nicomaque, on parvient à reconstituer l'histoire des genres. Il semble que vers le VI^e siècle avant notre ère, le genre dominant ait été une sorte de diatonique et que l'usage de « détendre » les cordes intermédiaires soit apparu vers le début du V^e siècle. Cette pratique consiste à abaisser les degrés des deux cordes intermédiaires vers le grave en agrandissant l'intervalle aigu au détriment du pycnon, assemblage des deux petits intervalles graves du tétracorde. L'enharmonique, le plus détendu, introduit des intervalles de plus en plus petits, et Aristoxène met un arrêt à cette dérive en déclarant (avec bon sens) que le plus petit intervalle perceptible lors de sons successifs est le quart de ton. Il n'est pas écouté et un grand nombre de ses détracteurs s'ingénient à inventer des divisions mathématiques de la quarte de plus en plus précises. Nous verrons plus loin que deux grandes tendances gouvernent la théorie musicale : ceux qui mathématisent et cherchent la perfection harmonique (les Pythagoriciens, Philolaos, Archytas, Platon) ; et ceux qui privilégient l'écoute et l'accord à l'oreille, dont le chef de file est Aristoxène (2^e partie du IV^e s.).

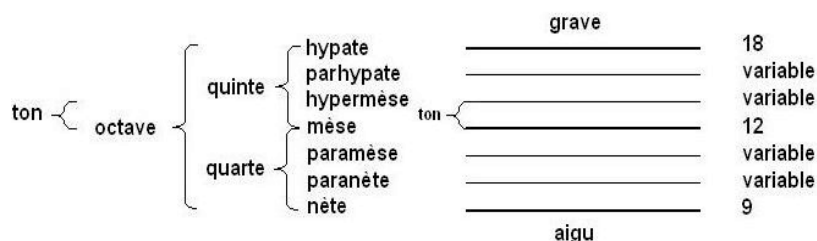
⁷² Nicomaque de Gêrase, *Fragments harmoniques*, trad. Ch.-É. Ruelle, Baur, Paris, 1881, fragment 4, p. 47. À la fin du traité (p. 39), on compte 33 degrés, et dans le fragment 7 (p. 53), on en compte 28, mais rien n'indique qu'ils correspondent aux cordes d'un même instrument. Pour l'historique du nombre de cordes de la *lyra*, voir H. Weill et Th. Reinach, Édition et traduction du traité *De la musique* de Plutarque, p. 119-120, note 302.

On peut donc partir de l'hypothèse selon laquelle chaque tétracorde était accordé dans un genre proche du diatonique. La question qui se pose maintenant c'est l'étendue de l'heptacorde. Deux positions se manifestent. La plus fréquente, héritée du texte tardif (II^{ème} s. de notre ère) de Nicomaque de Gêrase, prescrit un assemblage de deux tétracordes égaux à une quarte ; l'étendue est alors environ une septième mineure de notre harmonie d'aujourd'hui (do-si $\flat$). Cependant, on ne peut pas concevoir que les musiciens se passent de la consonance d'octave qui est la plus naturelle, d'une façon universelle.



Heptacorde de Terpandre
deux tétracordes conjoints
chaque tétracorde couvre une quarte
l'heptacorde ne couvre pas une octave

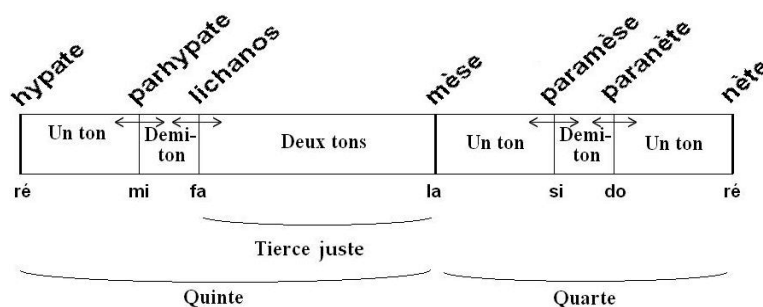
L'autre position, défendue notamment par un éminent philologue du XIX^{ème} siècle, A. J-H Vincent, évoque la possibilité d'une étendue couvrant une octave⁷³. Il s'appuie sur un manuscrit de théorie harmonique datant du XII^{ème} siècle, manuscrit dit « de l'Hagiopolite ». Les premières études d'ethnomusicologie du XIX^{ème} siècle (Helmholtz) supposent également l'étendue d'une octave.



Heptacorde dit "de l'Hagiopolite"
deux tétracordes inégaux
une quinte grave et une quarte aiguë
l'heptacorde couvre une octave

Selon François-Auguste Gevaert, les deux systèmes se seraient succédé, et la lyre heptacorde existait bien avant Terpandre.

⁷³ Cependant les sept cordes correspondaient aux sept planètes connues, cette analogie est confirmée par de nombreux textes. Or dans la cosmologie grecque le soleil est à égale distance de Saturne et de la Lune, soit les deux planètes correspondant aux cordes extrêmes du tétracorde (hypate et nète).



Exemple (hypothèse) d'un heptacorde couvrant une octave
Les deux tétracordes sont inégaux :
une quarte aiguë et une quinte grave

genre diatonique (ancien) et mode dorien

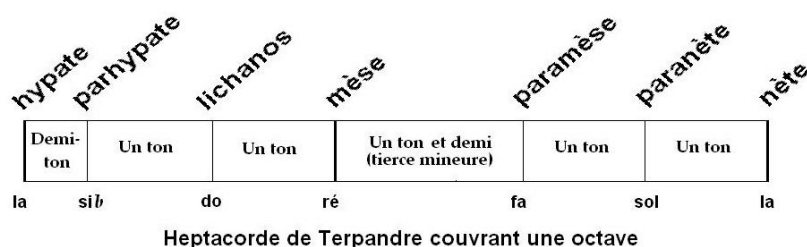
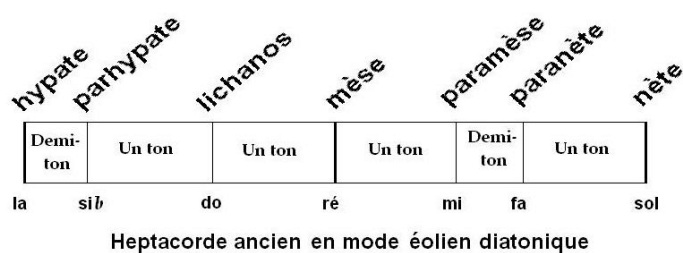
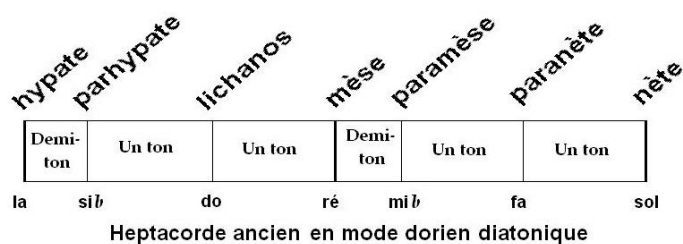
Sur cet exemple, hypothèse pertinente, d'un heptacorde tel que pouvait l'envisager Terpandre, on a ajouté une corde dans le tétracorde aigu qui reste consonant à la quarte ; il est ici en genre diatonique (deux tons et un demi-ton). La *lichanos* détermine comment on va diviser le tétracorde grave. Selon sa position (*lichanos* signifie « indicatrice »), on choisit le genre : le diatonique est harmoniquement impossible sur le tétracorde grave : c'est sans doute une des raisons de l'apparition des genres chromatiques puis enharmoniques, en élargissant plus ou moins l'intervalle *lichanos-mèse* au détriment du pycnon constitué par les deux intervalles entre l'*hypate* et la *lichanos*.

Les hypothèses de l'heptacorde couvrant une octave

Selon les défenseurs de Pythagore, notamment Nicomaque de Gérace qui s'appuie sur un récit de Philolaos (pythagoricien du Vème s.), la huitième corde a été insérée dans un heptacorde qui ne couvre pas une octave, mais deux quartes conjointes. Toutefois le processus a sans doute été plus complexe et a pris du temps, peut-être un demi-siècle, au cours du VIème siècle avant notre ère. La question a été débattue par plusieurs musicologues hellénistes du XIXème siècle.

Selon François Auguste Gevaert, éminent musicologue belge du XIXème siècle, les deux tétracordes conjoints accordés en genre diatonique étaient pratiqués dans les chants en mode dorien, tandis que Terpandre, originaire de Lesbos, pratiquait l'ancien mode éolien. Dans le premier cas, le demi-ton du tétracorde aigu est placé près de la mèse, dans le second, le demi-ton⁷⁴ est au milieu. Terpandre aurait, en accroissant la tessiture de l'heptacorde à une octave, supprimé ce demi-ton, et décalé les trois cordes d'un ton vers l'aigu. L'intervalle entre mèse et paramèse est alors d'un ton et demi, une tierce mineure. Dès lors, la différence entre mode dorien, en usage dans le Péloponnèse, et l'éolien de Lesbos n'a plus lieu d'être, et il n'y a plus de demi-ton dans le tétracorde aigu.

⁷⁴ François-Auguste Gevaert, *Histoire et théorie de la musique dans l'Antiquité*, Gand, 1881, t. II, chap. IV, p. 258-259.



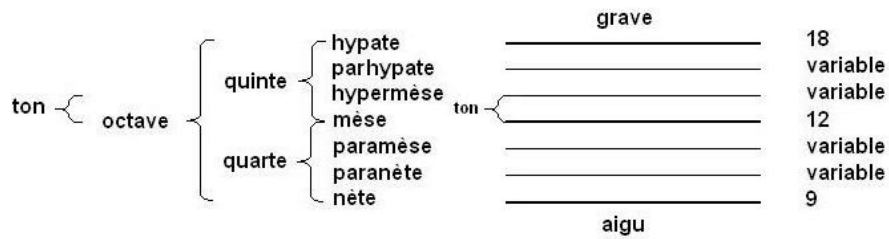
Heptacordes anciens et solution de Terpandre selon F.- A. Gevaert

C'est probablement lors de son établissement à Sparte que Terpandre aurait ainsi réalisé cette synthèse entre les deux modes.

La lyre heptacorde selon le manuscrit de l'Hagiopolite

D'autres musicologues de la Grèce ancienne, notamment A.-J. H. Vincent, écrivent que les deux tétracordes n'étaient pas identiques et que l'un d'eux formait une quinte (trois tons et demi) et que l'assemblage formait donc une octave. Le philologue s'appuie sur un manuscrit byzantin du Moyen Age qui décrit parfaitement cet heptacorde ancien⁷⁵ :

⁷⁵ A.-J. H. Vincent, « Fragments musicaux de l'Hagiopolite », in *Notices et extraits des manuscrits ...*, t. XVI-2, 1847, p. 266-273.



Heptacorde dit "de l'Hagiopolite"
deux tétracordes inégaux
une quinte grave et une quarte aiguë
l'heptacorde couvre une octave

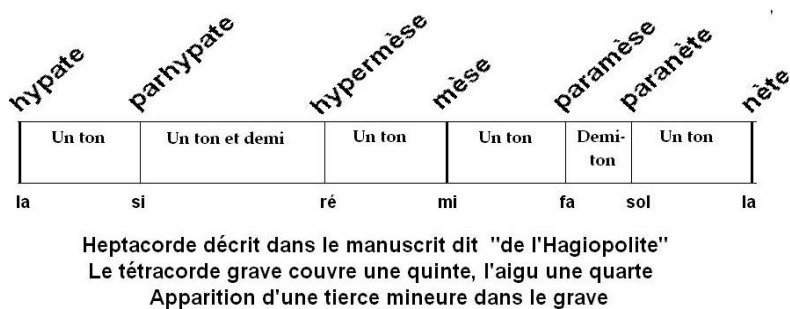
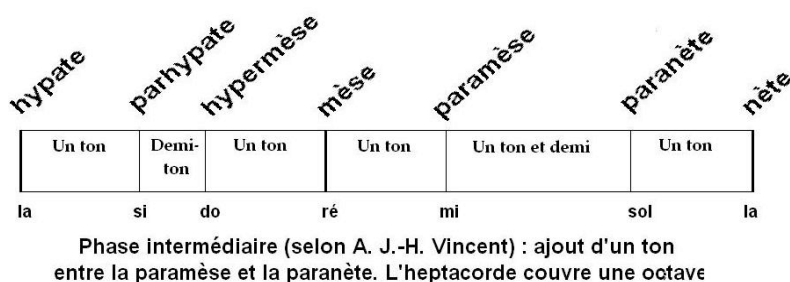
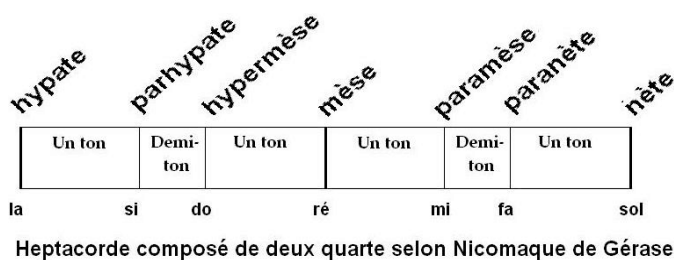
La troisième corde de cet instrument, appelée aussi hypermèse, est à la première nommée hypate, dans le rapport épitríte [4/3, rapport de la quarte] [...]

La mèse ou corde moyenne est à la troisième dans le rapport sesquioctave [9/8, rapport du ton majeur] [...]

Quant au rapport de la mèse à la première corde ou hypate, c'est le rapport hémiole [3/2, rapport de la quinte]

Le manuscrit, dit « de l'Hagiopolite », a été édité et traduit au milieu du XIX^{ème} siècle par Alexandre J. H. Vincent qui nous propose une conjecture en mode phrygien. La *lichanos* prend ici le nom d'*hypermèse* (le grave est vers le haut, d'où *hyper*).

Dans son commentaire, A.-J. H. Vincent propose une hypothèse selon laquelle, après l'heptacorde ancien de deux quarts et avant le passage à l'octocorde de Pythagore, il aurait existé une phase intermédiaire, qui aurait précédé l'heptacorde présenté sur le manuscrit de l'Hagiopolite. Au cours de cette phase, on aurait augmenté l'intervalle entre paramèse et paranète d'un ton, ce qui a pour effet de placer la nète à l'octave de l'hypate. La progression aurait donc été celle-ci :

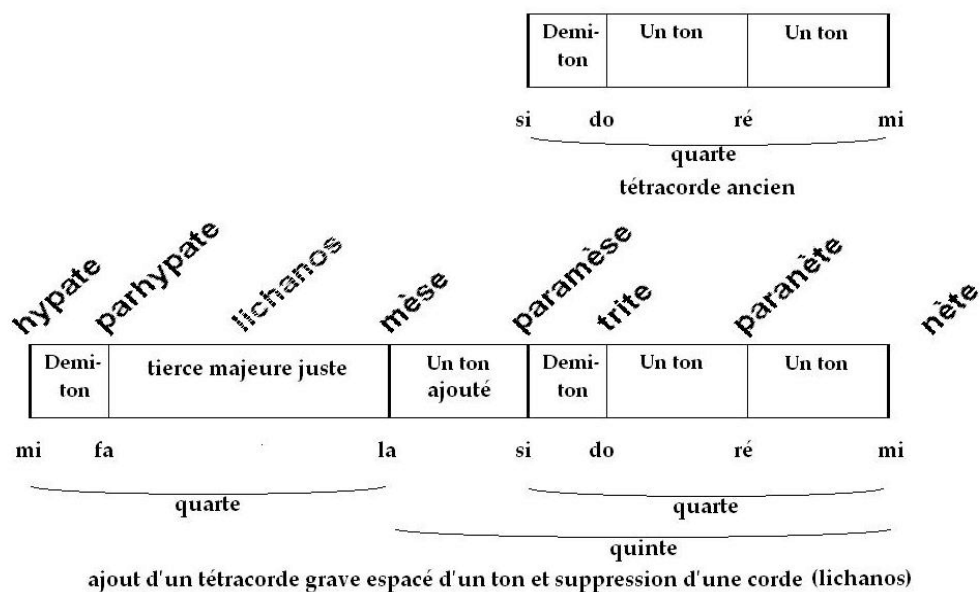


Plusieurs combinaisons sont possibles dans le mode diatonique composé de tons et de demi-tons, et qui semble être le mode employé avant le Vème siècle. La composition de deux tons et d'un demi-ton forme une quarte, trois tons et un demi-ton une quinte.

L'heptacorde de Terpandre selon Otfried Müller

Une autre hypothèse a été proposée par Otfried Müller dans son *Histoire de la littérature grecque*⁷⁶. Terpandre aurait ajouté un tétracorde vers l'aigu disjoint d'un ton du tétracorde grave (ce qui aurait fait un octocorde) et aurait supprimé la troisième corde en partant de la nète. Müller s'est sans doute laissé abuser par la représentation moderne occidentale qui fait du grave le socle du système ; pour lui, ajouter des cordes se fait forcément vers l'aigu. Pourtant, lorsque plus tard, les Grecs ajoutent une corde pour faire l'octave de deux tétracordes conjoints, il la placent dans le grave, c'est la *proslambanomène*. Il est donc probable que cette manipulation a eu lieu dans le tétracorde grave, et d'ailleurs il y a une certaine confusion chez le traducteur de Müller à ce propos. En corrigeant, nous avons :

⁷⁶ Otfried Müller, *Histoire de la littérature grecque jusqu'à Alexandre*, trad. Hillebrand, Durand, Paris, 1865, t. I, p. 310, n. 2.



Heptacorde de Terpandre selon l'hypothèse de O. Müller :
étendue d'une octave, genre enharmonique esquissé dans le tétracorde grave,
apparition de la tierce juste

L'hypothèse est pertinente, et elle est renforcée par le témoignage de ps-Plutarque à propos d'Olympos, de peu postérieur à Terpandre, qui crée le genre enharmonique en évitant de jouer la lichanos, ce qui conforte peut-être qu'il s'agit de cette corde enlevée. Mais pourquoi Terpandre et Olympos refusaient les huit cordes ? On ne peut qu'invoquer des raisons mystiques qui accordaient au nombre sept des vertus magiques. Un peu plus d'un siècle plus tard, les Pythagoriciens transgresseront la règle.

L'heptacorde d'Olympos et le début du genre enharmonique

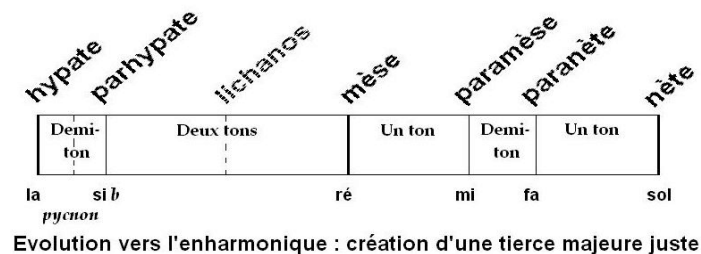
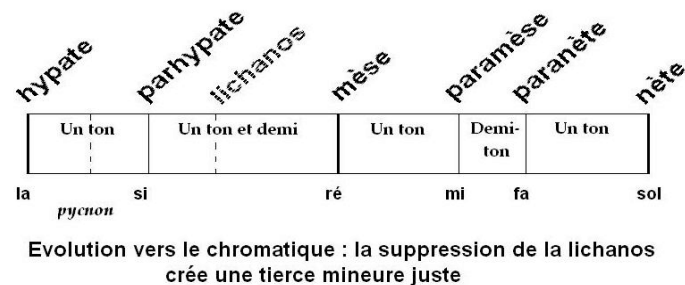
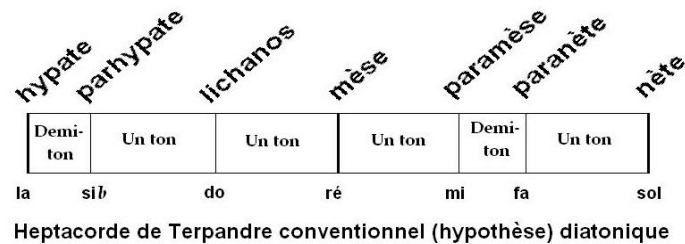
Si on se rapporte au traité plutarquien *Sur la Musique*, qui se réfère à Héraclide du Pont, Olympos serait l'inventeur du genre enharmonique. On y lit qu'il aurait inventé ce genre en évitant de jouer la lichanos dans le tétracorde grave (peut-être avait-il cassé une corde...).

Ps-Plutarque, De la musique, VII, 104-108 - (104) Ὀλυμπος δέ, ὡς Ἀριστόξενός φησιν, ὑπολαμβάνεται ὑπὸ τῶν μουσικῶν τοῦ ἐναρμονίου γένους εὐρετῆς γεγενῆσθαι (105) τὰ γὰρ πρὸ ἐκείνου πάντα διάτονα καὶ χρωματικά ἦν. (106) Ὑπονοοῦσι δὲ τὴν εὐρεσιν τοιαύτην τινὰ γενέσθαι (107) ἀναστρεφόμενον τὸν Ὀλυμπον ἐν τῷ διατόνῳ καὶ διαβιβάζοντα τὸ μέλος πολλάκις ἐπὶ τὴν διάτονον παρυπάτην, τοτὲ μὲν ἀπὸ τῆς παραμέσης, τοτὲ δ' ἀπὸ τῆς μέσης, καὶ παραβαίνοντα τὴν διάτονον λιχανόν, (108) καταμαθεῖν τὸ κάλλος τοῦ ἤθους, καὶ οὕτως τὸ ἐκ τῆς ἀναλογίας συνεστηκὸς σύστημα θαυμάσαντα καὶ

ἀποδεξάμενον, ἐν τούτῳ ποιεῖν ἐπὶ τοῦ Δωρίου τόνου·

Quant à Olympos, dit Aristoxène, il est considéré par les musiciens comme l'inventeur du genre enharmonique ; car, avant lui, tous les airs étaient diatoniques ou chromatiques. Voici comment l'on présume que se produisit cette découverte. Olympos, se mouvant dans le genre diatonique faisait souvent passer la mélodie directement à la parhypate diatonique [si], en partant tantôt de la paramèse [mi], tantôt de la mèse [ré], et en sautant la lichanos diatonique [do]. Il remarqua la beauté du caractère de cette progression, admira la gamme construite sur cette analogie, l'adopta et y composa des airs dans le ton dorien.

L'effet produit, sans doute inédit, était de produire une tierce majeure ou mineure, selon le genre, ce qui constitue une innovation car les tierces sont peu intégrées dans les systèmes grecs, alors qu'elles sont des consonances naturelles lorsqu'elles sont justes. Selon ps-Plutarque, le petit intervalle grave, par la suite, aurait été divisé en deux, produisant ainsi le pycnon, assemblage de deux petits intervalles de moins d'un ton.



**L'invention du genre enharmonique par Olympos
selon ps-Plutarque**

On voit la similitude entre cette hypothèse et la précédente. Quelle que soit la configuration retenue, il semble bien que l'heptacorde de la fin du VII^{ème} siècle couvrait une octave et qu'il annonce les genres à pycnon, en introduisant les tierces, mineure pour le chromatique, majeure pour l'enharmonique.

La problématique de la tierce dans la musique grecque est importante et elle a souvent été délaissée par les musicologues hellénisants. Il est très probable que les tierces étaient employées par les musiciens avant que les mathématiciens ne viennent troubler leur harmonie. En réalité, on doit à Platon et à ses successeurs le délaissement de la tierce car dans son système construit sur le seul genre diatonique, il impose le diton qui n'est pas une tierce juste et qui est dissonant.

Ce diton dissonant va traverser toute l'histoire de la musique occidentale jusqu'à la Renaissance, avec la réforme de Zarlino à la fin du XVI^{ème} siècle.

Chapitre 3

La musique au service des mathématiques : Pythagore

Les Pythagoriciens et la musique grecque ancienne

La théorie musicale de la Grèce antique a largement contribué à l'élaboration des systèmes en usage dans la musique occidentale, et plus encore dans la musique arabe. Les systèmes grecs ont été construits à partir d'une pratique des musiciens qui chantaient en jouant d'un instrument à cordes appelé phorminx. Cet instrument comprenait quatre cordes pendant la période archaïque, puis sept vers le VI^{ème} siècle avant notre ère lorsqu'il prit le nom de lyre. La problématique posée à ces musiciens est l'accord de ces cordes entre elles, c'est à dire la définition des intervalles musicaux qu'elles encadrent, et la détermination des degrés correspondants, en donnant un nom à ces « notes ».

C'est ici que les mathématiques sont venus « en aide » aux musiciens qui s'accommodaient jusque là de leurs qualités auditives et d'une pratique transmise par l'enseignement de la musique. Pythagore, ou plutôt les Pythagoriciens, sont à l'origine de cette mathématisation de la musique, et nous allons tenter de reconstituer la démarche de ces novateurs en évitant les approximations séduisantes du discours narratif.

On pourrait toutefois renverser cette thèse généralement adoptée dans la littérature par son inverse : c'est la théorie musicale qui est venue en aide aux mathématiques en permettant une représentation simple des rapports et des opérations associées. C'est d'ailleurs pour cette raison que la musique est considérée par Archytas puis par Platon, comme des sciences sœurs, aux côtés de l'astronomie, de l'arithmétique et de la géométrie⁷⁷. Plus tard, la musique fera partie du corpus d'enseignements mathématiques au sein du quadrivium médiéval créé par Boèce au VI^{ème} siècle.

L'école et la pensée pythagoricienne

Pythagore a créé son école, sorte de société secrète qui se propose d'approfondir la connaissance, sans la partager, à la fin du VI^{ème} siècle av. J.-C.. Selon plusieurs sources concordantes, il est d'usage d'affirmer que Pythagore n'a rien écrit. Ceci n'est pas étonnant, puisque nous ne disposons d'aucune trace, ni même d'évocation, de *textes longs écrits en prose* avant la seconde partie du V^{ème} siècle en Grèce, époque à laquelle ils apparaissent alors en nombre. On sait qu'auparavant, les textes longs étaient rédigés en vers et étaient appris par cœur (poèmes, tragédies et comédies, et également textes

⁷⁷ Archytas de Tarente, DK 47 B1, 5-7 : « [...] ils nous ont laissé des connaissances claires, ainsi que sur la géométrie et les nombres et plus que tout, sur la musique. Car ces sciences nous semblent être sœurs. ». Platon, *République*, VII, 530d : « Il semble que, de même que les yeux ont été formés pour l'astronomie, les oreilles ont été formées pour le mouvement harmonique, et que ces deux sciences sont sœurs, comme l'affirment les Pythagoriciens, et comme nous l'admettons, nous aussi ». D'autres classifications ont été proposées, comme celle de Geminus. Voir à ce sujet : Bernard Vitrac, « Les classifications des sciences mathématiques en Grèce ancienne », in *Archives de Philosophie* 68 (2005) p. 269-301.

philosophiques, comme ceux de Parménide ou d'Empédocle). Il est probable que vers -440 un problème technique ait été résolu concernant les supports d'écriture propre à cette région (peut-être l'encollage des papyrus)⁷⁸. Nous disposons de peu de données sur les supports d'écriture de cette époque et le sujet est peu traité. (Fin de cet aparté qui ouvre pourtant des perspectives aux historiens des techniques en Grèce ancienne).

L'aura de Pythagore couvre la région du sud de la Grande Grèce, autour des villes côtières de Métaponte, de Tarente et de Crotone qui entourent le Golfe de Tarente. Les livres sur sa vie et son école écrits au Vème et au IVème siècle ont disparu, ce qui alimente bien entendu le mystère et les histoires qui souvent tiennent lieu d'Histoire. Aristote a écrit un ouvrage *Sur les Pythagoriciens* et Aristoxène est l'auteur d'une *Vie de Pythagore*. Ces deux ouvrages aujourd'hui perdus ont sans doute été lus jusqu'aux premiers siècles de notre ère et ont alimenté les biographies de cette époque (celles de Porphyre, de Jamblique et de Diogène Laërce).

Au IIIème siècle av. J.-C., Ératosthène a établi une chronologie des siècles précédents et il est sans doute à l'origine d'une confusion qu'on ne conteste plus aujourd'hui, entre notre Pythagore et un probable homonyme plus ancien qui avait brillé sur les stades comme athlète ; cette confusion avait amené des incohérences chronologiques telles que la mort de Pythagore à l'âge de 112 ans. On connaît à peu près l'année de sa disparition, vers -495, et il semble qu'il soit né vers -560. Pythagore serait arrivé à Crotone vers -530, peut-être après des voyages qui l'auraient mené de son Ionie natale vers l'Égypte et, a-t-on dit, en Mésopotamie. Il est presque impossible d'établir avec certitude la biographie, la chronologie et même la doctrine de Pythagore, tant les sources sont contradictoires et souvent hagiographiques donc peu fiables.

Les travaux menés par les philologues et les érudits depuis le XIXème siècle indiquent que la pensée pythagoricienne primitive a été transmise jusqu'aux premiers siècles essentiellement par Hippase (début du Vème siècle) et par Philolaos (fin du Vème siècle), disciples de l'école qui disparaît vers -440. Selon Diogène Laërce et d'autres biographes, Platon aurait acheté les trois livres de Philolaos qui aurait ainsi trahi la règle du secret en écrivant. L'ouvrage disparu de ce pythagoricien de Crotone, un *Péri phuséôs*, *Sur la nature*, aurait été copié et lu par plusieurs auteurs aux époques romaine et alexandrine. On dispose de quelques fragments plus ou moins authentiques cités par des auteurs tardifs. Un autre écrit est connu grâce à une longue citation dans le chapitre que Diogène Laërce consacre à la vie de Pythagore ; il a été transmis par Alexandre Polyhistor,

⁷⁸ Les Égyptiens écrivent alors sur des papyrus depuis plusieurs siècles. Il s'agit d'étroites et longues bandes constituées par la tige de la plante, et assemblées par collage pour constituer des rouleaux. Le papyrus et la colle (probablement une sorte d'argile fine) provenaient de la même région du delta du Nil. Les Assyriens écrivaient sur des tablettes d'argile, les Grecs gravaient et écrivaient sur la pierre, sur des tablettes de bois et sur des céramiques. Il semble que les Ioniens utilisaient des peaux animales.

et aurait été l'œuvre d'un platonisant du III^{ème} siècle av. J.-C., selon l'étude consacrée à ce texte par A.-J. Festugière⁷⁹.

Le courant mystique qu'on désigne sous le nom de néo-pythagorisme a connu un succès important au cours des premiers siècles de notre ère. Les *Vie de Pythagore* de Porphyre et de Jamblique, écrites vers cette époque, se sont de tous temps très bien vendues, mais elles sont à lire avec précautions, tant les anecdotes apocryphes se mêlent aux sources anciennes rapportées par ces auteurs. C'est regrettable, car il n'y a rien de pire pour l'historien que les légendes pour obscurcir la connaissance, et celles-là abondent. Compte tenu du caractère hagiographique de ces deux *Vies de Pythagore*, de Jamblique et de Porphyre, on ne peut pas les considérer comme des sources fiables pouvant nous renseigner sur une période et sur une pensée élaborée huit siècles auparavant. On ne s'y réfèrera donc qu'avec une grande prudence⁸⁰.

Le pythagorisme ancien a bien existé comme courant philosophique, et il subsiste quelques traces de cette pensée dans les écrits disponibles du IV^{ème} siècle av. J.-C. – on lit souvent que Platon est sensiblement influencé par le pythagorisme – et chez quelques Académiciens plus tardifs : on cite généralement Speusippe et Xénocrate comme représentants de ce courant platonicien pythagorisant. Par ailleurs, la lecture de plusieurs textes d'Aristote (dont le livre A de la *Métaphysique*) nous délivrent quelques aspects de la pensée pythagoricienne.

En marge du pythagorisme, un théoricien de la musique, Archytas de Tarente

Archytas de Tarente est un savant, un homme d'état et un ami de Platon. La rencontre d'Archytas avec Platon est décisive dans la démarche réciproque de partage des connaissances, alors que le philosophe athénien complète son approche mathématique du monde en reprenant le concept pythagoricien d'harmonie (*République*, *Timée*).

Les sources concernant la vie, les écrits et la philosophie d'Archytas sont peu nombreuses. Aristoxène de Tarente l'a connu et a rédigé une *Vie d'Archytas* perdue mais encore disponible aux premiers siècles et qui a probablement servi de matière au court chapitre que lui consacre Diogène Laërce. Les extraits de commentaires sur sa pensée et plusieurs fragments sont disponibles dans *Die Fragmente der Vorsokratiker* de Hermann

⁷⁹ A.-J. Festugière, « Les mémoires pythagoriques cités par Alexandre Polyhistor », in *Revue des études grecques*, 58, 1945, p. 1-65.

⁸⁰ Luc Brisson commente avec malice la pauvreté des sources fiables sur Pythagore et son école : « Suivant le principe qui prévaut dans le domaine de l'érudition et qui veut que la production savante croisse en proportion inverse de l'information disponible, la littérature secondaire sur Pythagore et les Pythagoriciens est foisonnante et difficile à maîtriser ». Luc Brisson, « Platon, Pythagore et les Pythagoriciens » in M. Dixsaut et A. Brancacci, *Platon, source des présocratiques, exploration*, Vrin, Paris, 2002, p. 21-46.

Diels⁸¹. Carl A. Huffman a écrit une étude complète, avec biographie et étude critique des fragments en 2005⁸².

Brisons rapidement une légende dont on trouve encore les traces ici où là : Archytas, né entre -435 et -410, contemporain de Platon (né en 428) n'a pas été le précepteur d'Empédocle lui-même mort vers -445. C'est Suidas, le lexicographe grec oriental du XI^e siècle, qui a véhiculé auprès des biographes cette inexactitude, sans doute à la suite d'une erreur de copie⁸³. Archytas serait mort entre -360 et -350, soit peu de temps avant Platon (-348).

Né dans la Grande Grèce dans le dernier tiers du V^e siècle, Archytas a reçu un enseignement pythagoricien, comme tous les lettrés de ces villes du sud de notre Italie : Sybaris, Crotone, Métaponte, Tarente, Locres, Rhégium, puis Agrigente et Syracuse en Sicile. Il semble qu'à cette époque, c'était là le passage obligé pour ceux qui se destinaient à la gestion de la cité et aux suffrages des habitants. L'école pythagoricienne a formé plusieurs hommes politiques, et compte également, parmi ses disciples parfois indirects, des botanistes, des mécaniciens, des médecins, des zoologues, des géographes et quelques autres spécialistes. De nombreux savants ont reçu cet enseignement ou sont imprégnés de cette culture : parmi ceux dont on dispose de quelques fragments, on peut citer les musiciens Hippase, Glaucos, Philolaos et Aristoxène, les médecins Pausanias, Philistion, les médecins et physiciens Alcmeon et Empédocle, le botaniste Ménestor, et notre Archytas, musicien, mécanicien, mathématicien et moraliste.

Cependant, recevoir un enseignement ne signifie pas forcément adhérer aux thèses du maître, une fois la maturité intellectuelle atteinte, et c'est pour avoir négligé cette banalité que, par la suite, on fera Pythagoriciens certains philosophes qui n'en avaient reçu que l'enseignement⁸⁴. Comme Empédocle avant lui, et comme Aristoxène après lui, Archytas singularise sa pensée et prend une certaine autonomie par rapport au dogme. C'est ainsi que, souvent présenté comme Pythagoricien, il n'a pas, à notre connaissance, approfondi outre mesure la symbolique numérique qui caractérisait l'école. Son approche pragmatique et rationnelle, notamment pour résoudre les problèmes mathématiques est en

⁸¹ Hermann Diels, Walther Kranz, *Die Fragmente der Vorsokratiker*, 1903, 1906, ... 6e éd. : 1951-1952. 3 vol.; Archytas, vol. I, référencé sous DK 47 A1 à A25 pour les commentaires et DK 47 B1 à B9 pour les fragments (Jusqu'à l'édition de 1934, Archytas porte la référence 35 au lieu de 47) ; p. 250 à 264 dans l'édition de 1906.

⁸² Carl A. Huffman, *Archytas of Tarentum, Pythagorean, Philosopher and Mathematician King*, Cambridge University Press, 2005, 2010, 665 pages.

⁸³ Suidas, *Lexicon graece et latine*, ed. G. Bernhard, 1853, d'après Gaisford (Oxford, 1834), t. I, p.779.14 : τοῦτον φανερώς γενέσθαι διδάσκαλον Ἐμπεδοκλέους, « Il [Archytas] fut, de toute évidence, le maître d'Empédocle ».

⁸⁴ L'assimilation de la pensée de ces philosophes au pythagorisme s'est effectuée à l'époque du néo-platonisme, à partir du II^e siècle, notamment avec Porphyre et Jamblique qui ont beaucoup contribué à la légende de Pythagore (ils sont l'un et l'autre auteurs d'une *Vie de Pythagore*). Parmi ces auteurs qualifiés de Pythagoriciens, outre Archytas, on note Xénocrate, Eudoxe et même Parménide et Empédocle.

opposition avec l'abstraction et le caractère magique de la spéculation pythagoricienne. Le professeur Carl A. Huffman, spécialiste d'Archytas de Tarente, explique à ce propos⁸⁵ :

Il est important d'insister sur le fait que cette tendance à traiter Archytas comme un successeur de Pythagore et du pythagorisme présocratique est une construction de la tradition néo-pythagoricienne de l'Antiquité tardive, et qu'elle est directement contredite par l'approche aristotélicienne dans les années qui suivent la disparition d'Archytas.

En effet, Aristote se réfère à plusieurs reprises à Archytas sans jamais l'associer aux Pythagoriciens qu'il critique fréquemment. Dans la liste des ouvrages d'Aristote donnée par Diogène Laërce ainsi que dans celle d'Hésychius – listes d'origine ancienne et probablement en grande partie fiables – on trouve un *Sur la philosophie d'Archytas* en trois livres, qui côtoie un *Contre les Pythagoriciens*, ce qui indique qu'Aristote ne rangeait pas celui-là parmi ceux-ci, et qu'il éprouvait, au moins dans sa jeunesse, un certain respect pour le philosophe.

Le nombre comme concept

La pensée pythagoricienne est centrée d'une façon presque mystique sur le nombre et sur l'harmonie, concept issu de la rencontre entre l'arithmétique, la géométrie, l'observation astronomique et l'étude des intervalles musicaux. Selon Aristoxène (cité par Stobée), « il semble que Pythagore ait porté l'intérêt le plus vif à la recherche sur les nombres, et que, au lieu de s'en tenir à l'usage qu'en font les marchands, il l'ait fait fortement progresser, allant jusqu'à assimiler toutes choses à des nombres »⁸⁶.

Pour les Pythagoriciens, les principes de l'être ne sont pas dans les causes matérielles comme chez les philosophes Ioniens qui invoquent l'eau ou l'air comme principe des choses, ni dans le feu d'Héraclite, mais dans la dualité immatérielle de l'un et de l'illimité. Selon Aristote qui résume leur ontologie, « l'infini lui-même et l'un lui-même sont la substance des choses dont ils sont les prédicats ; c'est pourquoi, pensent-ils, la substance de toute chose est nombre »⁸⁷.

Le déterminisme numérologique qui caractérise les Pythagoriciens les incite à repérer les rencontres remarquables entre les nombres qui ne sont, pour eux, jamais fortuites. Ils agrègent ces nombres en séries et leur confèrent des propriétés magiques dont la signification demeure assez obscure. La série 1, 2, 3, 4 constitue la tétractys aux propriétés singulières : la somme de ces nombres forme la décade, structure supposée

⁸⁵ Carl A. Huffman, *Archytas of Tarentum, Pythagorean, Philosopher and Mathematician King*, Cambridge University Press, 2005, 2010, p. 45. Le Pr Huffman enseigne les Lettres Classiques à l'Université DePauw (Indiana, E.-U.).

⁸⁶ DK 58 B2, Stobée, *Eclogae*, I, Préface, 6 ; Wehrli, fr. 23.

⁸⁷ Aristote, *Métaphysique*, A, 5, 987a18, trad. M.-P. Duminil et A. Jaulin, GF, Paris, 2008.

parfaite et génératrice du monde. Théon de Smyrne, néo-platonicien du II^e siècle, témoigne de l'importance de la tétractys ou quaternaire⁸⁸ :

L'importance du quaternaire qu'on obtient par addition (c'est-à-dire 1, 2, 3, 4) est grande en musique, parce qu'on y trouve toutes les consonances. Mais ce n'est pas seulement pour cela que tous les Pythagoriciens lui font l'honneur du premier rang : c'est aussi parce qu'il semble renfermer toute la nature de l'univers. C'est pour cette raison que la formule de leur serment était : « J'en jure par celui qui a transmis dans nos âmes le quaternaire, source de la nature éternelle ». *Celui qui a transmis*, c'est Pythagore ; ce qui a été dit de la tétractys paraît venir en effet de ce philosophe.

De même, comme dans d'autres civilisations, le chiffre 7 a des vertus sacrées et donne lieu à des commentaires sur les septenaires comme chez Hippocrate ou dans le *Περὶ ἑβδομάδος* (*Péri hebdomados*) d'Anatolius d'Alexandrie (néo-pythagoricien du III^e siècle). On peut également citer la série 6, 8, 9, 12 qui construit les règles de l'harmonie musicale, on y reviendra. Les carrés et les cubes sont traités avec égards, et génèrent les nombres dits plans et solides.

Parmi les dogmes métaphysiques des pythagoriciens, on retient l'immortalité de l'âme et la métempsycose héritées, semble-t-il, des Égyptiens. Les Pythagoriciens sont, selon Aristote, à l'origine du mythe de l'harmonie céleste : après avoir affecté un nombre de la décade à chaque planète, cette théorie raconte que les mouvements des astres produisent des sons en harmonie que nous n'entendons pas parce que nous y sommes accoutumés⁸⁹.

Le fonctionnement social de l'école est très strict, et impose un régime alimentaire végétarien, de longues périodes de silence avant de pouvoir s'exprimer, une obligation au secret et de nombreux interdits ; tout ceci a fait l'objet d'une littérature anecdotique abondante jusqu'à aujourd'hui.

La science pythagoricienne se résume à un principe, « les choses sont nombres »⁹⁰. Dans l'histoire de la pensée, la déconnexion du réel favorise l'abstraction, et le

⁸⁸ Théon de Smyrne, *Des connaissances mathématiques utiles pour la lecture de Platon*, ed. grec et trad. française J. Dupuis, Hachette, Paris, 1892, p. 155.

⁸⁹ L'harmonie des astres a été décrite et réfutée par Aristote (*Du ciel*, II, 9, 291a-b). Cette théorie poétique a été maintes fois évoquée dans l'histoire des théories musicales et de l'astronomie. On retient notamment le grand astronome Johannes Kepler qui en a fait un ouvrage célèbre publié en 1619, *Harmonices mundi*. Dominique Proust a écrit un remarquable ouvrage d'histoire des sciences à ce sujet : Dominique Proust, *L'harmonie des sphères*, Seuil, Paris, 2001.

⁹⁰ Sur l'importance du nombre comme essence des choses, ou comme représentation, nous ne pouvons que nous en remettre à Aristote et à son panorama des idées philosophiques qui l'ont précédé, dans le premier livre de la *Métaphysique*. Aristote y critique les Pythagoriciens, et il est difficile de faire la part des choses,

pythagorisme a marqué une étape importante dans ce processus de conceptualisation propre au bassin méditerranéen⁹¹. La confluence de la géométrie ionienne avec la recherche ésotérique sur les nombres, que Pythagore (ou un autre, peu importe) ramène de Mésopotamie, associée également avec une connaissance cosmologique encore inédite, ont forgé cette nouvelle approche du savoir : l'attribution et la distribution des nombres à chaque élément constituant le monde. La science pythagoricienne a déconnecté le nombre de la quantité pour lui donner son autonomie et le considérer comme un concept. On ne dénombre plus des objets, on joue avec des nombres abstraits, en les additionnant, en les mettant en scène dans des figures, en les multipliant, les uns avec les autres, puis par eux-mêmes. On invente la « raison », le λόγος (*logos*), archétype de nos rapports, qui consiste à additionner à un nombre entier une partie de lui-même. Mais jouer avec les nombres ne suffit pas, les Pythagoriciens racontent une histoire du monde, une mythologie dans laquelle chaque chose importante est figurée par un nombre, en fonction de qualités intrinsèques ou arbitraires attribuées à ces choses.

Les obstacles à une physique pythagoricienne

La physique pythagoricienne (du moins le peu qu'on en connaisse et pour peu qu'il y en eût une) s'inscrit contre le naturalisme ionien d'Anaximandre dans un idéalisme mystique, décrivant le monde comme un ordre parfait et immuable dans lequel les éléments sont en rapports numériques les uns avec les autres. La cosmologie pythagoricienne se crée sur une structure numérique issue de la partition de l'octave musicale selon les rapports qui définissent les intervalles consonants d'octave et de quarte. Ces rapports sont basés sur des combinaisons des nombres 2 et 3 et de leurs multiples ; on les retrouve dans le fameux triangle formant la *tétractys*⁹². Voici comment Aristote nous explique la physique pythagoricienne, avec toutes les précautions à prendre, compte tenu de son opposition à cette pensée⁹³ :

Par nature, les nombres sont les premiers des êtres, et ils [les Pythagoriciens] y voient plus d'analogie avec les choses et les phénomènes, qu'avec le feu, l'air ou l'eau ; par exemple, telle modification des nombres détermine la justice, telle autre l'âme et l'intelligence, telle autre le moment favorable, et à peu près ainsi de toutes les autres choses ; de plus, ils voyaient dans les nombres les propriétés et les rapports de l'harmonie ; et

entre le dénigrement et l'exposé objectif de la pensée pythagoricienne et des autres courants présocratiques. Aristote, *Métaphysique A* (livre I), chapitres 3 à 5.

⁹¹ Le bassin méditerranéen est à comprendre ici au sens large, incluant le « croissant fertile » : Mésopotamie, Assyrie, Phénicie et haute vallée du Nil.

⁹² La tétractys, τετρακτύς, est le « nombre quaternaire », somme des quatre premiers entiers, c'est-à-dire 10. On la représente par un triangle formé par des points disposés sur quatre lignes (1 ; 2 ; 3 ; 4). Ce triangle présente, pour les Pythagoriciens, un certain nombre de propriétés quand on joue avec ces nombres (élévation au carré, par exemple).

⁹³ Aristote, *Métaphysique*, I, 5, 985b26-986a3.

encore, comme la nature entière a été formée à la ressemblance des nombres, et que les nombres sont les premiers de tous les êtres, ils posèrent les éléments des nombres comme les éléments de tous les êtres, et le ciel tout entier comme une harmonie et un nombre.

L'idéalisme pythagoricien s'accommode mal des réalités de la nature. On imagine mal les Pythagoriciens faisant des expériences et observant les altérations des phénomènes dans le temps. Leur démarche est de découvrir les principes, *ἀύλως καὶ νοερώς* (« de façon abstraite et intellectuelle ») comme le dit Proclus. Pourtant, selon Aristoxène cité par Diogène Laërce⁹⁴, Pythagore serait l'inventeur des poids et des mesures, ainsi que de l'instrument « monocorde » pour mesurer les intervalles musicaux ; mais il s'agit peut-être d'une même expérience, celle des cordes tendues par des poids qui détermineraient les intervalles musicaux (voir plus loin, la légende des marteaux). Ces deux figures antagonistes d'un même personnage confortent l'idée d'une pluralité des personnalités au sein de la mouvance pythagoricienne qui a probablement évolué entre -520 et -440, année généralement admise pour la disparition de l'école.

En dépit de cette expérience racontée bien plus tard, les Pythagoriciens sont généralement décrits, par les successeurs les moins tardifs, et notamment par Aristote, comme de purs intellectuels absolument déconnectés de la réalité physique. Dès le IV^{ème} siècle, et encore pour longtemps, l'adjectif pythagoricien est synonyme de mathématicien, ce qui ne simplifie pas le travail des historiens et des biographes. Pourtant nombre de géomètres et d'arithméticiens, et parmi eux Archytas de Tarente longtemps considéré comme pythagoricien, sont loin de partager le mysticisme des nombres qui constitue le fondement de la pensée pythagoricienne en rejetant les observations les plus évidentes de la réalité.

En acceptant les nombres entiers comme seuls descripteurs du monde et des phénomènes, le pythagorisme s'enferme dans un système discontinu, discrétisant les processus et les décomposant en éléments indivisibles et juxtaposés, pourvu que l'ordre soit respecté.

Cette discrétisation implicite, conjuguée avec l'affirmation de l'infini, va rendre certaines thèses pythagoriciennes impossibles à concevoir, comme le mouvement. L'école éléate va s'engouffrer dans la brèche avec Parménide, puis Zénon d'Élée et ses célèbres paradoxes. Ce courant de pensée, qui s'établit vers la fin du VI^{ème} siècle en Campanie, expose une philosophie en opposition avec celle des Pythagoriciens dont elle est contemporaine. Les philosophes éléates ont reçu une formation pythagoricienne qui a sans doute contribué à leur opposition au dogme. Cette formation pythagoricienne est favorisée par la proximité géographique avec Crotone, mais elle est compensée par leur attachement à la culture scientifique de l'Ionie qu'ils ont récemment quittée (la côte ouest de la Turquie

⁹⁴ Diogène Laërce, *Vies*, VIII, 14.

d'aujourd'hui). La science ionienne, fondatrice de la science grecque, est portée, dès la fin du VII^{ème} siècle par Thalès, Anaximandre puis Anaximène. Elle construit sa cosmogonie en prenant pour principes soit l'eau (Thalès) soit l'air et le feu (Anaximandre et Anaximène). Cette conceptualisation de la nature s'élabore sur l'observation et sur la perception, et cet empirisme contredit l'idéalisme pythagoricien. La pensée éléate est le produit de cette double influence, l'empirisme ionien et l'abstraction pythagoricienne. Les principaux représentants connus de l'école éléate sont Xénophane, Mélissos, Parménide et Zénon d'Élée.

A partir du V^{ème} siècle, la science qui se développe en Grande Grèce, l'Italie du sud, est fortement influencée par le pythagorisme. En revanche, le mysticisme qui accompagne cette pensée spéculative constitue pendant longtemps un obstacle à une étude mathématico-physique de la nature. Selon les textes qui nous sont parvenus, Parménide, Alcéméon, Philolaos et même Platon semblent éprouver des difficultés à identifier et à conceptualiser les phénomènes, tandis qu'Empédocle d'Agrigente, en Sicile, semble être l'initiateur de cette physique à inventer. Un peu plus tard, Archytas de Tarente est sans doute l'un des pionniers de cette démarche, dans la Grande Grèce du début du IV^{ème} siècle.

Les Pythagoriciens et les mathématiques musicales

Parmi les thèmes favoris des exégètes de la pensée pythagoricienne, la théorie de l'harmonie fait l'objet d'une littérature abondante et, faute de sources fiables, pas toujours scientifique ni historique. Suffisamment de témoignages, pourtant, s'accordent pour attribuer aux Pythagoriciens un travail important sur les intervalles musicaux et l'attribution de nombres et de rapports de nombres à ces intervalles. Ils sont à l'origine du travail des mathématiciens sur l'étude des proportions grâce à la partition de l'octave en intervalles définis par des rapports exacts. Les lois physiques imposent un cadre : un rapport de valeur 2 pour l'octave composée d'une quinte de rapport $3/2$ et d'une quarte de $4/3$. La problématique des mathématiciens est de définir les rapports qui déterminent les intervalles plus petits.

La théorie des premiers harmoniciens

La plupart des textes qui décrivent le système harmonique grec ancien sont de production tardive, et parmi eux la presque totalité provient de la Grèce orientale des premiers siècles. Les plus connus sont les *Harmoniques* de Ptolémée et son *Commentaire* par Porphyre qui cite longuement Archytas de Tarente, contemporain de Platon ; le traité *Sur la musique* attribué à Plutarque qui cite longuement Héraclide du Pont (contemporain d'Aristoxène), le *Manuel d'harmonique* de Nicomaque de Gérace, les *Notions utiles pour la lecture de Platon* de Théon de Smyrne, le *Commentaire sur le Timée* de Proclus. D'autres textes d'auteurs parfois inconnus ont été rassemblés au XVII^{ème} siècle par Meursius puis

traduits en latin par Meibom⁹⁵. Quelques auteurs latins ont également apporté leur contribution, comme Vitruve dans le livre V de son *Traité d'Architecture*, et Boèce dans *l'Institutio Musicae* ; on cite également Macrobe, Cassiodore et Marcius Capella.

En revanche, les textes anciens sont rares et le plus souvent sous forme de fragments à l'authenticité parfois douteuse. C'est le cas des fragments de Philolaos, transmis par Nicomaque puis par Stobée, qui seraient les plus anciens témoignages de la théorie pythagoricienne. Parmi les textes anciens qui traitent de l'harmonie mathématique, outre celui d'Archytas, deux sont difficiles à authentifier et à dater, il s'agit de la *Division du canon* longtemps attribué à Euclide et de *l'Introduction harmonique* qui, selon Charles-Émile Ruelle (en 1884) serait d'un certain Cléonide. On dispose également des volumineux *Problèmes* du pseudo Aristote qui ne sont pas antérieurs au III^{ème} siècle av. J.-C. : la section XI est consacrée à la voix et au son, et les *Problèmes musicaux* qui traitent de l'harmonie, constituent la section XIX. Il existe également quelques fragments d'Ératosthène, de la même époque. Par bonheur, les musicologues accèdent à la connaissance des systèmes musicaux des Anciens Grecs grâce aux trois livres des *Éléments harmoniques* d'Aristoxène, jeune contemporain d'Aristote dont le discours polémique nous apprend beaucoup sur les différents systèmes musicaux. Platon a également écrit quelques passages sur la théorie musicale dans la *République* et dans *Timée*, qui ont considérablement influencé ses successeurs, et la musique occidentale dès l'époque des néo-platoniciens.

Sans entrer dans l'étude approfondie des systèmes musicaux grecs, on apprend par les critiques d'Aristoxène qu'il existait auparavant deux grands courants chez ceux qui traitent de musique et d'harmonie. Le plus connu de ces courants est celui des mathématiciens. Ils envisagent l'étude des intervalles comme un terrain favorable à l'étude des proportions. Guidés par la rigueur et l'abstraction, ils se soucient peu de savoir comment le musicien va pouvoir accorder sa lyre en ajustant un intervalle tellement petit qu'il est quasiment imperceptible, surtout si l'on tient compte des conditions techniques de fabrication des cordes, du chevillage, des variations de température, bref de la réalité.

Un autre courant est évoqué par Aristoxène, il est représenté par Lasos d'Hermione, musicien et facteur d'instruments, également théoricien de la musique du début du V^{ème} siècle. Il fabrique des *aulos* et on se doute que la problématique de la justesse est importante. On peut supposer que la préoccupation des facteurs d'aulos n'est pas d'obtenir des micro-intervalles insignifiants au regard de la marge d'erreur due aux variations de température. En effet, si les cordes peuvent être ajustées en les tendant plus ou moins, c'est beaucoup plus délicat pour les instruments à vent sur lesquels l'instrumentiste est contraint d'ajuster en bouchant plus ou moins les trous.

⁹⁵ Meibom, *Antiquae musicae auctores septem*, Amsterdam, Elzevir, 1652 ; sept textes d'auteurs sur la musique antique (Aristoxène, Ps-Euclide, Nicomaque de Gêse, Alypius, Gaudentius, Bacchius l'Ancien, Aristide Quintilien, Marius Capella).

Aristoxène se place dans une position médiane : il enseigne la théorie de la musique et se place à la fois dans une position de rigueur mais aussi de pragmatisme. La lecture de ses *Éléments harmoniques* nous apprend beaucoup à la fois sur la méthode employée par les musiciens pour construire et transmettre leur théorie des systèmes harmoniques, mais aussi sur les travers des mathématiciens, qui ne sont probablement pas musiciens (sinon ils ne développeraient pas des systèmes qui n'apportent rien à la technique musicale).

Musiciens ou pas, les Pythagoriciens du début du Vème siècle ont fait leurs observations sur des instruments de musique, et sans doute sur le plus fréquent à cette époque, la lyre.

La hauteur du son : tension ou longueur de la corde

L'instrument le plus fréquent, en tout cas le plus représenté, est la lyre à sept cordes (heptacorde). Cette lyre est accordée en deux quarts successives et conjointes⁹⁶. Les cordes intermédiaires sont laissées à la disposition de l'instrumentiste, selon différents modes. On dispose de peu de données sur la nature des cordes – probablement en boyaux – et sur la tension qu'elles pouvaient subir⁹⁷. Sur cette lyre traditionnelle, la hauteur des notes est déterminée par la tension des cordes qui sont de longueurs égales. Tout le vocabulaire grec de la hauteur des sons fait appel à cette notion de tension (*tasis* en grec, qui signifie parfois la note), pendant plusieurs siècles encore.

En revanche, depuis la Renaissance, les musiciens sont imprégnés du paradigme de l'instrument à cordes sur lequel la hauteur de la note est avant tout fonction de sa longueur que l'on fait varier par la position des doigts qui pressent les cordes sur la touche. La tension, réglable au moyen de chevilles, est supposée constante pour chaque corde pendant l'exécution de l'œuvre musicale. Il est difficile de se représenter que, pour les Grecs anciens, seule la tension détermine la hauteur du son.

Trois paramètres interviennent pour déterminer la fréquence de la vibration d'une corde tendue. Galilée avait déjà présenté en 1638 cette loi physique intuitivement connue depuis longtemps⁹⁸ :

Il y a trois manières de rendre plus aigu le son d'une corde : la raccourcir d'abord, l'étirer ou plutôt la tendre davantage ensuite, enfin l'amincir.

⁹⁶ Dans cette partie, on évite les hypothèses et les polémiques sur l'étendue de l'heptacorde ; ici retenue comme couvrant deux quarts conjointes.

⁹⁷ Annie Bélis a écrit plusieurs articles à ce sujet : « À propos de la construction de la lyre », in *Bulletin de correspondance hellénique*, 1985, 109-1, p. 201-220.

⁹⁸ Galilée, *Discours et démonstrations mathématiques*, 1638, trad. M. Clavelin, A. Colin, Paris, 1970, p. 80-85. Taylor Brook, « Of the motion of a stretched string », in *Philosophical Transactions*, London, 1713, p. 53 : $f = 1/2l \sqrt{T/m}$, avec l la longueur de la corde, T sa tension et m sa masse.

La loi a été mathématisée par Brook Taylor en 1713 :

$$f = \frac{1}{2l} \times \sqrt{\frac{T}{m}}$$

avec l la longueur de la corde, T sa tension et m sa masse linéaire.

La fréquence de vibrations d'une corde tendue, qui détermine la hauteur du son, dépend donc de sa longueur, de sa masse et de la tension. La masse est difficile à modifier de façon pratique, toutefois les grosses cordes font un son plus grave. La tension intervient pour donner la hauteur du son de la corde à vide mais la relation entre la fréquence et la tension n'est pas proportionnelle mais quadratique. C'est à dire qu'il faut un poids quatre fois plus élevé pour produire un son à l'octave (dont la fréquence est double). On doit au père de Galilée, Vincenzo, vers 1589, la vérification de cette loi, alors que depuis toujours on enseignait que la tension était proportionnelle à la hauteur de son⁹⁹. L'erreur transmise au cours des siècles avait peu d'importance puisque les musiciens tendaient la corde « à l'oreille » et qu'il n'avaient pas besoin pour cela de l'aide des mathématiciens.

La longueur de la corde déterminant la hauteur du son s'est finalement imposée, à la Renaissance, comme la plus pratique, tant pour le luthier que pour l'instrumentiste. On change la longueur en bloquant la corde avec le doigt, ce qui implique qu'elle soit à proximité d'une surface plane, la « touche » de l'instrument (luth, violon, guitare, etc.). Sur les instruments tels que la harpe ou le piano, chaque note dispose de sa propre corde, de longueur adaptée. Et surtout, la relation entre la longueur et la fréquence est linéaire, c'est à dire que la longueur double d'une corde donnant une certaine note donnera cette même note à l'octave inférieure.

Pour remarquer cette relation, il a fallu l'observer. On ne sait pas comment les Pythagoriciens ont été amenés à considérer la longueur des cordes comme déterminant la hauteur du son d'une façon toujours reproductible et identique, à une époque où, dans le monde grec, on accorde les cordes en les tendant plus ou moins. Il est fort possible qu'au cours de ses voyages en Égypte et en Mésopotamie, Pythagore ait observé les instruments à cordes inégales, des harpes, en usage depuis deux millénaires dans ces régions, comme on peut le vérifier sur plusieurs représentations iconographiques¹⁰⁰.

Quoi qu'il en soit, il est peu contestable que les Pythagoriciens ont établi une relation entre les intervalles consonants et des nombres entiers en mesurant les longueurs

⁹⁹ V. Galilei, *Discorso intorno alla diversita delle forme del Diapason*, in Palisca, The Florentine Camerata, Yale University Press, New Haven, 1988. Voir l'approfondissement que j'ai développé dans : François Baskevitch, « Musique et science à Florence à la fin du XVIème siècle », in *Arts et Sciences à la Renaissance*, sous la dir. d'E. Barbin, Paris, Ellipses, 2007, p. 189-214.

¹⁰⁰ Le passage, en Grèce, du système technique de la harpe à celui de la lyre constitue une rupture technique symétrique de celle qui affecte la Mésopotamie vers la fin du IIème millénaire, avec l'arrivée d'instruments à cordes égales et caisse de résonance perpendiculaire au plan des cordes. Voir la fin du chapitre 1.

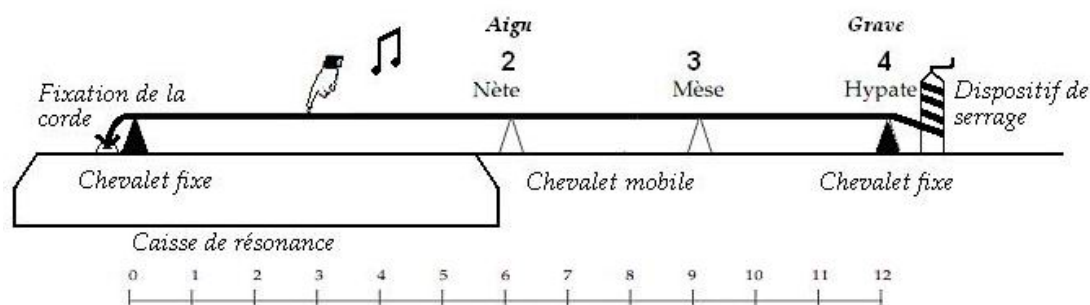
de cordes tendues qui produisent les sons composant ces intervalles. En revanche, pour une raison inexplicée, les Pythagoriciens n'ont pas inventé un instrument à cordes de longueurs inégales et les musiciens ont continué à utiliser leur lyre.

Pour le Pythagoriciens, cette relation entre longueur de corde et hauteur de son n'était qu'une façon d'aborder la question des rapports arithmétiques, puisque la fonction est linéaire et continue. Ils ont alors affecté un nombre à chaque degré musical correspondant aux consonances produites en heurtant la corde et c'est sans doute cet usage inédit du nombre en musique qui représente l'innovation pythagoricienne.

Le monocorde des Pythagoriciens : un instrument de mesure

L'apport des Pythagoriciens est fondé sur l'expérience pratiquée sur un instrument inventé pour l'occasion, le monocorde, sorte d'instrument à une corde qui semble-t-il était tendue sur une tablette munie d'un chevalet mobile.

Lorsque on pose fermement le doigt, ou un objet, sur une corde tendue sur une tablette, en formant deux segments exactement égaux, on obtient, en pinçant l'un des segments, le son de l'octave aiguë de la corde à vide.



Le monocorde des Pythagoriciens

Cette représentation est une hypothèse :
nous ne disposons d'aucune trace archéologique d'un monocorde pythagoricien.

L'octave du haut correspond à la moitié de la longueur de la corde, et sert de référence, à la mesure et à la détermination des autres intervalles : les Pythagoriciens ne mesurent pas, comme on le ferait de nos jours, à partir de la corde à vide, mais à partir de la note la plus aiguë, la *nète*, qui correspond au milieu de la corde à vide. Dès lors, les rapports déterminant les intervalles sont mesurés à partir de cette demi-corde, et sont donc toujours vers le grave, puisque la corde s'allonge.

Ils observent alors que, pour une même tension, les longueurs de cordes jouant les sons consonants sont dans des rapports de nombres entiers 2, 3, 4, puis, plus tard, de leurs multiples. Or, cette série de nombres composent ce qu'ils nomment la *tétraktys*, combinaison aux vertus magiques dans le cadre de l'approche mystique des nombres abstraits.

Tétractys

1	•	1
2	• •	+ 2 = 3
3	• • •	+ 3 = 6
4	• • • •	+ 4 = 10

La division de l'octave des Pythagoriciens : la théorie harmonique

Avant Philolaos, disciple des Pythagoriciens de la seconde moitié du Vème siècle, l'harmonie est fondée sur la consonance de la quarte, définie par les cordes extérieures du tétracorde. Les sons intermédiaires, les deux cordes intérieures, sont laissés à l'appréciation de l'instrumentiste ou du chanteur, selon des codes inconnus et sans doute variables avec les époques et peut-être avec les régions. La lyre heptacorde ancienne est formée de deux tétracordes conjoints qui couvrent deux quartes consécutives.

Cependant, on l'a vu, selon certains historiens¹⁰¹, on aurait accordé l'heptacorde en imposant l'octave entre les cordes extrêmes, au détriment de l'égalité des deux tétracordes¹⁰². Dans le cas retenu ici de deux quartes conjointes, les cordes extrêmes ne font donc pas un intervalle consonant, car deux quartes consécutives forment à peu près un intervalle de sib-do (toujours en descendant chez les Grecs anciens), soit à peu près une septième mineure, intervalle dissonant à cette époque, tandis que l'intervalle consonant le plus proche est l'octave¹⁰³. Selon Plutarque, sur les premières lyres heptacordes (VIIème et VIème siècles), les musiciens ne jouaient le chant que sur les six cordes graves, en délaissant la *nète*, ce qui couvre un intervalle de sixte mineure, consonant celui-là (renversement de la tierce majeure), lab-do¹⁰⁴. Si cette observation est vraie, il est probable que cette sixte mineure fût juste pour l'oreille (8/5), et non pythagoricienne c'est-à-dire calculée et fausse à l'oreille ($= 2^7 / 3^4 = 128/81$ au lieu de 128/80).

Production des sons sur une corde tendue par la méthode des harmoniques

Tentons une hypothèse qui serait une explication de la méthode employée par les Pythagoriciens pour passer de l'heptacorde à l'octocorde. On ne peut pas concevoir que les musiciens se passent longtemps de l'intervalle d'octave. Munis de leurs deux

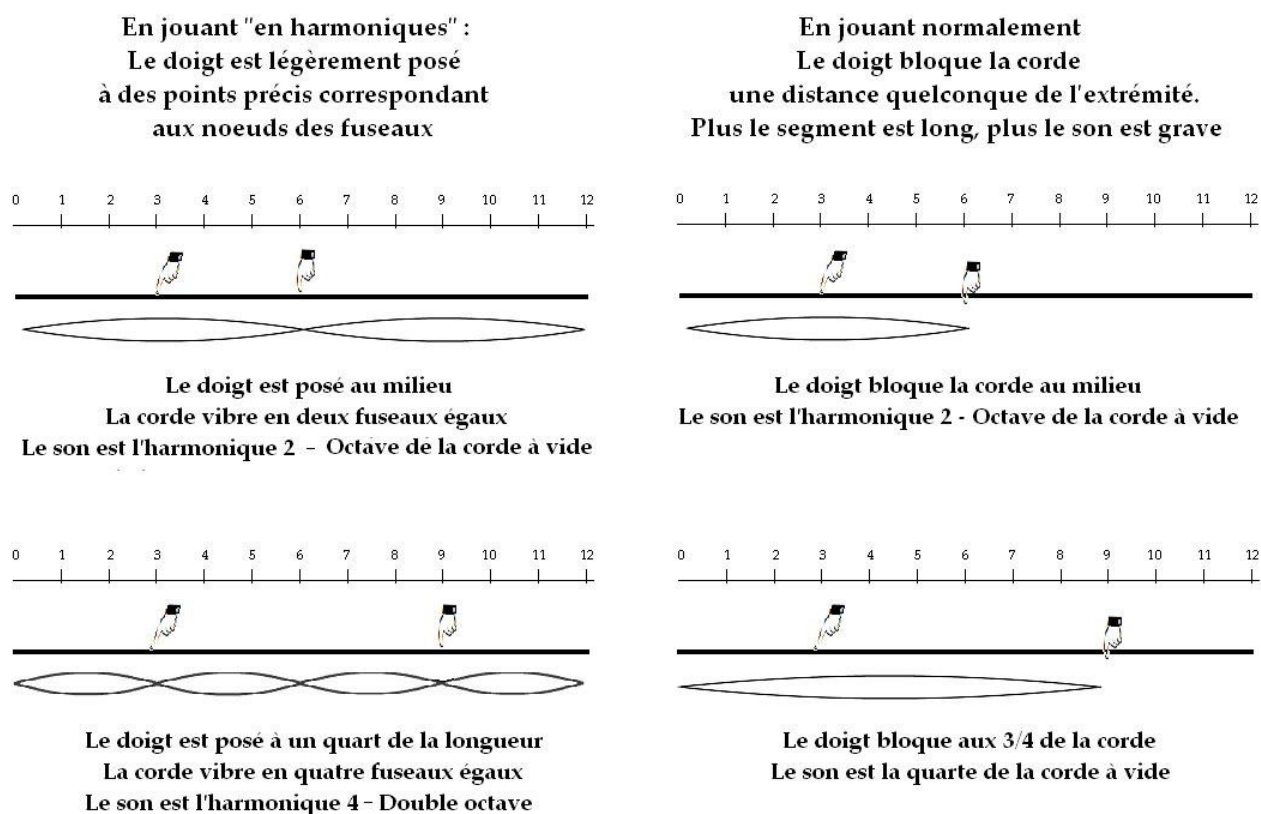
¹⁰¹ Notamment Édouard Zeller, *La philosophie des Grecs*, 1877 ; ainsi que H. Helmholtz, *Théorie physiologique de la musique*, Masson, Paris, 1868, p. 345 ; et d'autres commentateurs qui se fondent sur Nicomaque, *Manuel d'harmonique*, IX, 43 (mais ce passage n'est pas clair).

¹⁰² Voir chapitre précédent.

¹⁰³ L'intervalle de septième mineure demeure inconsonant quasiment jusqu'au XXème siècle, lorsque la « blue note » est importée des musiques non occidentales à gamme pentatonique (jazz, blues).

¹⁰⁴ Ps-Plutarque, *De la musique*, édition critique et explicative par Th. Reinach et H. Weill, Leroux, Paris, 1900, p. 105. Cette configuration est celle du proto-éolien (heptacorde) cité dans la note 270 de Th. Reinach.

tétracordes conjoints formant deux quarts, il ont une possibilité, évoquée ici comme une hypothèse, probable mais invérifiable. Il existe une possibilité de jouer l'octave aiguë de la corde grave, l'*hypate*. Il s'agit du mode d'attaque de la corde désigné par l'expression « jouer en harmonique » par les guitaristes d'aujourd'hui : on pose légèrement le doigt au milieu de la corde et on la pince. Le son produit est alors l'harmonique 2 du fondamental, l'octave. Cette hypothèse suppose que l'expérience est antérieure à l'usage du monocorde, puisqu'elle en est en quelque sorte le fondement expérimental.



Ces lieux particuliers sont situés aux points de partage (aux nœuds), à la moitié, au quart et au tiers de la longueur de la corde et produisent des sons à la l'octave, à la double octave et à la double quinte¹⁰⁵. Il existait d'ailleurs, au Vème siècle av. J.-C., des instruments sur lesquels on jouait selon ce mode, comme la *magadis*, qui avait la qualité de se jouer « en octaviant », c'est à dire en jouant « en harmoniques ».

¹⁰⁵ Les sons produits aux points de partage par la méthode des harmoniques ne sont pas les mêmes sons qui sont produit par le raccourcissement de la corde en appuyant fortement le doigt, comme on le fait quand on joue sur une guitare. Ces sons correspondent au frettes (petites barres transversales qui partagent le manche en intervalles inégaux) : $1/2$ = octave ; $3/4$ = quarte ; $2/3$ = quinte. Pour les harmoniques, aux mêmes points, on obtient : $1/2$ = octave ; $3/4$ = double octave ; $2/3$ = double quinte. Tout ceci doit sembler bien complexe pour qui ne maîtrise pas l'approche mathématique de l'harmonie, mais on se familiarise vite avec ces notions ...

L'hypothèse présentée ici propose donc un heptacorde composé d'un assemblage de deux tétracordes conjoints égaux à une quarte, dont l'étendue couvre une septième mineure. L'octave aiguë (la *nète*) est produite « en octaviant » la corde grave, l'*hypate* qui se trouve être l'octave grave de la *nète*.

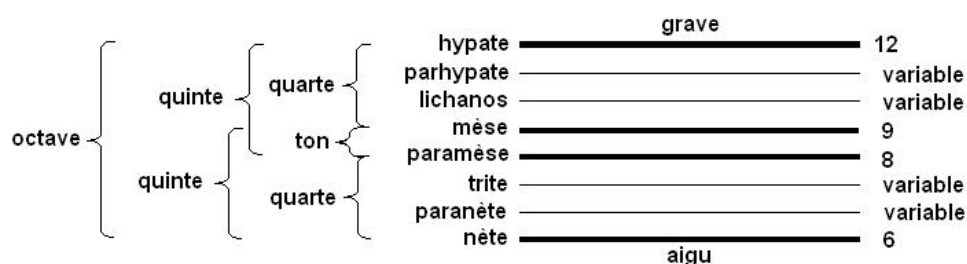
La méthode de jeu « par harmoniques » est sans doute à l'origine du passage à l'octocorde. Les Pythagoriciens ont repéré des lieux de la corde qui correspondent aux degrés déterminant les intervalles consonants : la double octave, la quarte et l'octave. Les distances entre ces points sont alors définies, les Pythagoriciens les ont forcément mesurées, en établissant des rapports : le quart de la corde pour la double octave, le tiers pour la quarte, et la moitié de la longueur pour l'octave. On peut penser que les Pythagoriciens ont d'abord fait ces constatations sur une lyre, en observant les sons harmoniques, avant d'inventer un instrument plus adéquat, le monocorde.

La révolution harmonique de l'octocorde

Ce serait à l'époque de Pythagore qu'une huitième corde aurait été adjointe, près de la *mèse* (corde médiane). Les historiens de la musique grecque s'accordent sur ce point. Ce passage de sept à huit constitue sans doute une transgression car le nombre sept a un caractère sacré. Grâce à cette nouvelle disposition, les deux cordes extrêmes forment l'octave, et un nouvel intervalle est créé, le ton. L'ajout de cette huitième corde et la création du nouvel intervalle est d'une importance considérable dans l'histoire de l'harmonie occidentale puisqu'elle en constitue le fondement.

Si on veut à la fois conserver l'étendue de l'octave et la présence de deux tétracordes égaux formant une quarte, il est nécessaire d'adjoindre une huitième corde. C'est ce qu'ont fait les Pythagoriciens selon ce que rapporte Nicomaque de Gêrèce :

24. Pythagore est le premier qui, pour éviter que, dans la conjonction, le son moyen comparé aux deux extrêmes offrit l'unique consonance de quarte, d'une part avec l'hypate, d'autre part avec la nète, et pour obtenir que les extrêmes produisent en nous la consonance la plus agréable, c'est-à-dire celle d'octave de rapport double (ce qui ne pouvait avoir lieu avec les deux tétracordes existants), intercala un huitième son qu'il plaça entre la mèse et la paramèse et qu'il fixa à la distance d'un ton entier de la mèse, à un demi-ton de la paramèse. La corde qui représentait auparavant la paramèse dans la lyre heptacorde est alors appelée trite (troisième à partir de la nète) et occupe cette position ; tandis que la corde intercalée se trouve la quatrième à partir de la nète et donne la quarte avec elle, consonnance que faisait entendre dans le principe la mèse avec l'hypate.

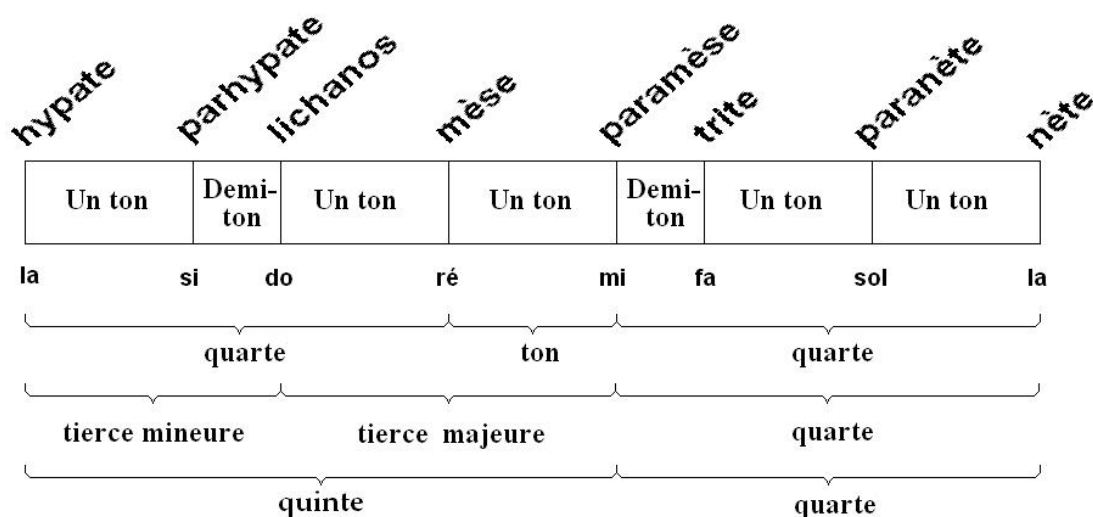


Octocorde pythagorien
deux tétracordes disjoints séparés par un ton
l'octocorde couvre une octave

La question posée à présent, et que les Pythagoriciens ont résolue, c'est le maintien des deux tétracordes égaux à une quarte : il est alors nécessaire d'ajouter un troisième intervalle pour compenser l'agrandissement de l'étendue. Et c'est la création de ce nouvel intervalle qui constitue la rupture cruciale avec le système ancien.

On a vu que la quarte vers le grave en partant de la *nète* détermine la position de la *paramèse*, troisième corde de l'heptacorde en partant de l'aigu. D'autre part, entre la *mèse* et l'*hypate*, au grave, l'intervalle est également une quarte.

Les Pythagoriciens créent donc un intervalle entre *mèse* et *paramèse* qui sera d'un ton, et insèrent une corde, la *trite*, entre la *paramèse* alors déplacée et la *paranète*¹⁰⁶.



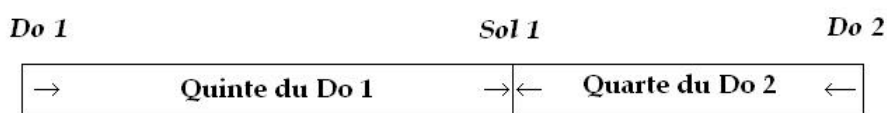
Octocorde pythagorien
deux tétracordes disjoints séparés par un ton
l'octocorde couvre une octave
 genre diatonique

¹⁰⁶ L'explication de nicomaque de Gêrase est un peu plus complexe, mais le résultat est le même.

En résumé, l'hypothèse proposée ici est que l'ancienne lyre heptacorde est composée de deux tétracordes égaux à une quarte et ne couvre donc pas une octave, laquelle est produite par harmoniques. La passage à l'octocorde s'est réalisé par l'ajout d'un nouvel intervalle égal à notre « ton majeur » (ré-mi) et l'ajout de la trite.

L'ajout d'une huitième corde établit donc l'octave comme la composition d'une quarte et d'une quinte. L'intervalle de quinte qui, on l'a vu, est équivalent musicalement parlant, à une quarte, est une innovation pythagoricienne. Cette innovation ne se place pas dans le domaine musical (puisqu'elle a toujours existé), mais dans le domaine des mathématiques : la quinte est définie par le rapport $3/2$ et la quarte par le rapport $4/3$ qui est égal à $8/6$, et dont l'inverse est égal à $6/8$, donc à $3/2$.

Une quinte montante à partir du do1 est bien égale à une quarte descendante à partir de do2.



Musicalement, la quarte et la quinte sont équivalentes

A propos de cette innovation, une célèbre légende, rapportée par Nicomaque de Gêrase au II^{ème} siècle, a traversé toute l'histoire de l'harmonie lorsqu'on parle de Pythagore¹⁰⁷ : passant devant un atelier de forgeron, il aurait remarqué les sons produits par quatre marteaux de poids différents, et constaté que ces sons formaient des intervalles de quarte, de quinte et d'octave. Il aurait alors pesé ces marteaux et observé que leurs poids respectaient les proportions 6, 8, 9, 12. En transposant l'expérience à des cordes tendues par des poids dans les mêmes rapports, il en aurait déduit son système d'intervalles.

Il a fallu attendre le père de Galilée, Vincenzo Galilei, dans les années 1580, pour que quelqu'un ait le courage de vérifier l'expérience, avec pour conséquence l'invalidation de cette théorie. En effet, les hauteurs de son sont proportionnelles aux *carrés* des poids tenseurs, il aurait donc fallu une série du type 36, 64, 81, 144¹⁰⁸. De toute façon, cette légende est apocryphe et sa première apparition se trouve dans le traité néo-pythagoricien de Nicomaque de Gêrase écrit vers le II^{ème} siècle. On peut admettre qu'il existait quelque chose qui ressemble à cette histoire mais qui aurait été largement romancée. On a

¹⁰⁷ Nicomaque de Gêrase, *Manuel d'harmonique*, trad. Ruelle, Baur, Paris, 1881, chap. VI, p. 19-21. Cette anecdote est également racontée par Macrobie (vers 400) et Boèce (480-524) ; elle a été reprise par tous les théoriciens de la musique jusqu'à la Renaissance.

¹⁰⁸ J'ai largement étudié la question dans ma thèse : François Baskevitch, « Les représentations de la propagation du son, d'Aristote à l'Encyclopédie », Nantes, 2008, p. 31-74, avec une hypothèse originale qui pourrait réhabiliter en quelque sorte l'expérience de Pythagore.

également évoqué une expérience similaire faite par un disciple de Pythagore, Hippiase de Métaponte, à partir de disques de métal de différentes dimensions¹⁰⁹. La traduction d'un fragment, que A.-J. Vincent date d'avant Aristoxène, raconte la même histoire mais il s'agit ici de vases¹¹⁰. Théon de Smyrne rapporte également que Lasos d'Hermione, à la même époque, avait utilisé à cet effet des vases remplis d'eau¹¹¹.

Ces consonances, les uns ont voulu les obtenir par des poids, d'autres par des longueurs, d'autres par des mouvements nombrés, d'autres encore par la capacité des vases.

On raconte que Lasos d'Hermione et les disciples d'Hippiase de Métaponte, ce dernier de la secte de Pythagore, ont observé sur des vases la rapidité et la lenteur des mouvements à l'aide desquels les consonances se calculent en nombres. Prenant plusieurs vases de même capacité et semblables, on a laissé l'un vide et l'on a rempli l'autre à moitié d'un liquide, puis on a frappé chacun d'eux, on a obtenu la consonance d'octave.

Laissant de nouveau un vase vide et remplissant l'autre au quart, on a obtenu, en les frappant, la consonance de quarte ; pour l'accord de quinte, on remplissait le tiers d'un vase : le rapport des espaces vides était, pour l'octave celui de 2 à 1, pour la quinte celui de 3 à 2, pour la quarte celui de 4 à 3.

Lorsqu'il s'agit de vases remplis d'eau ou de disques de métal, on a bien les rapports musicaux, puisque ces « instruments » se comportent comme des résonateurs linéaires et non comme des poids tenseurs de corde ; la loi physique est différente.

L'authenticité de cette expérience attribuée à Pythagore est généralement réfutée de nos jours, mais il convient de noter que A.-J. Vincent, au milieu du XIX^e siècle avait suggéré une proposition très pertinente fondée sur la confusion d'un copiste entre les termes σφῦρα (« marteau ») et σφαῖρα (« corps sphérique »)¹¹².

La mesure des intervalles sur le monocorde

Nous quittons maintenant la lyre et ses cordes d'égales longueurs, pour prendre l'instrument sur lequel les Pythagoriciens ont déterminé les rapports de l'harmonie, le monocorde. Ici, la tension est fixe et la longueur de la corde détermine le degré de la note : plus la corde est courte, plus le son est aigu, et la corde de longueur moitié de la longueur

¹⁰⁹ H. Diels, *Vorsokratiker*, trad. J.P. Dumont, *Les présocratiques*, Gallimard, Paris, 1988, Hippiase, 12, p. 79.

¹¹⁰ A.-J. H. Vincent, « Fragments musicaux de l'Hagiopolite », in *Notices et extraits des manuscrits ...*, t. XVI-2, 1847, p. 266-273.

¹¹¹ Théon de Smyrne, *Exposition des connaissances mathématiques utiles pour la lecture de Platon*, ed. grec et trad. française de J. Dupuis, Hachette, Paris, 1892, p. 97.

¹¹² A.-J. H. Vincent, *idem*.

totale sonne à l'octave supérieure. Cette loi physique est toujours vérifiée, elle a été mathématisée au début du XVIII^{ème} siècle par Brook Taylor.

Il est essentiel, pour aborder l'étude des intervalles dans la musique grecque ancienne, d'oublier la représentation liée aux instruments à cordes modernes tels que le violon ou la guitare. Sur ces instruments, on part de la corde à vide, et on raccourcit sa longueur pour produire des notes plus aiguës. Sur le monocorde pythagoricien, c'est le contraire, on part de la corde aiguë, la *nète* et on allonge la corde en la rendant plus grave.

Déterminer un rapport (un *logos*, λόγος, en grec), c'est faire une comparaison entre deux longueurs. Les rapports harmoniques sont définis par les longueurs de deux cordes. On commence par mesurer la différence entre les deux longueurs. Lorsque cette différence peut se compter plusieurs fois, sans reste, dans la petite longueur, on établit un rapport. Le nombre de fois où cette différence est contenue dans la petite longueur détermine le nombre et le nom du rapport (c'est le dénominateur de nos fractions).

L'étude sur le monocorde donne l'occasion d'approcher les mathématiques anciennes. Les rapports d'intervalles des Pythagoriciens sont toujours supérieurs à 1 : ils expriment des longueurs de corde en prenant comme unité la longueur de corde qui produit la note aiguë, la *nète* ; les sons plus graves sont produits par des cordes plus longues, donc leurs nombres, associés aux longueurs, sont supérieurs à 1.

On note que, dans la représentation numérique, les rapports définissant les intervalles au sein d'une même octave sont toujours compris entre 1 et 2.

A	AB	B			
	AB	AB/15	16/15		<i>Nète</i>
	AB	+	AB/9	10/9	<i>Un demi-ton plus grave que la nète</i>
	AB	+	AB/8	9/8	<i>Un ton mineur plus grave que la nète</i>
	AB	+	AB/5	6/5	<i>Un ton majeur plus grave que la nète</i>
	AB	+	AB/4	5/4	<i>Tierce mineure grave de la nète</i>
	AB	+	AB/3	4/3	<i>Tierce majeure grave de la nète</i>
	AB	+	AB/2	3/2	<i>Quarte grave de la nète</i>
	AB	+	AB	2/1	<i>Quinte grave de la nète</i>

Construction des intervalles au moyen des rapports épimores ($1 + 1/n$)

Par exemple, si la différence entre les deux cordes est de 3 (entre 6 et 9, par exemple), on compte combien de fois 3 peut se retrancher de la longueur de la petite

corde, ici 6. La réponse est 2 fois, donc le rapport a pour nombre 2 et la longueur de la grande corde est de $6 + 3 = 9$. On le note donc $3/2$ et c'est le rapport qui définit la quinte ; en grec on le nomme par son nombre, 2, représenté par la lettre bêta suivie d'une apostrophe : β' . Si les cordes sont de longueurs 8 et 9, la différence est 1, et on peut la retrancher 8 fois de la petite corde ; le nom du rapport est 8 (c'est le dénominateur) ; et on ajoute la différence, ici 1, au nombre du rapport, ce qui donne 9 (le numérateur) ; on obtient le rapport $9/8$ (en notation moderne), ou *épogdoon* (= un huitième en plus de l'unité), noté en grec η' .

On remarque que ces rapports sont de la forme : $(1 + n) / n$, ou $1 + (1/n)$. Les Anciens leur ont donné le nom d'*épimore* pour exprimer qu'ils sont constitués de l'unité à laquelle on ajoute une partie d'elle-même (*épi* = au dessus ; *mora* = partie) ; dans les textes latins, on emploie *superparticularis*, qui sera traduit en français par « superparticulier », et parfois par « superpartiel »¹¹³. Ce sont ces rapports, avec les rapports multiples (xn / n), qui constituent le socle de l'harmonie pythagoricienne car ils expriment les rapports des intervalles en principe consonants.

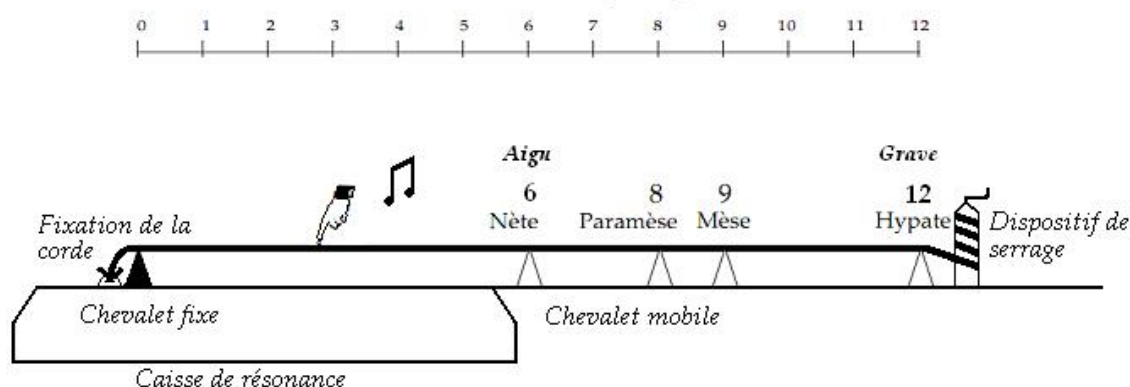
La dénomination des rapports se rapporte au nombre n , c'est à dire à notre dénominateur. Les noms des rapports *épimores* sont donc, en latin, composés du préfixe *sesqui-* suivi du nombre, par exemple : sesquitiens (*sesquitiertius*) pour la quarte $4/3$, sesquiquinte (*sesquiquintus*) pour $6/5$, sesquioctave (*sesquioctavus*) pour le rapport du ton $9/8$. Il existe d'autres rapports, plus complexes, qui correspondent aux intervalles non consonants, sous le nom d'*épimère* ou « superpartiens ».

Les rapports déterminant les intervalles sont :

2/1, donc 2, pour l'octave
 3/2 pour la quinte
 4/3 pour la quarte (renversement de la quinte)
 5/4 pour la tierce juste
 6/5 pour la tierce mineure
 9/8 pour le ton majeur
 10/9 pour le ton mineur
 16/15 pour le demi-ton

¹¹³ Il existe une confusion fréquente dans les traductions françaises, entre « superpartiels » (*superparticularis*) et « superpartiens » (idem en latin), parfois traduit par « superpartissant ». Brigitte Van Wymersch y fait référence en note de son article (n. 12, p. 87) « la tradition arithmétique en musique, l'exemple de Gassendi » in *Sciences et Techniques en Perspective*, 2^e série, 8/1 (2004), p. 85- 97. Dans cet article, je m'efforcerai d'employer la transcription des termes grecs *épimore* (*superparticularis* = $n+1/n$) et *épimère* (*superpartiens* = $n+x/n$).

Le monocorde des Pythagoriciens



Méthode des Pythagoriciens Longueurs mesurées sur le monocorde

On compare des longueurs de cordes, dans un premier temps à partir de la plus petite : la longueur de 0 à 6 (le 0 n'existe pas chez les Grecs, c'est ici une facilité).
On va mesurer la différence entre la corde longue et la petite corde qui mesure 6.
On cherche la position du chevalet mobile qui répond aux questions suivantes :
Combien de fois cette différence est contenue, sans reste, dans la petite corde ?

- 1 fois, alors on ajoute cette différence à la longueur de la petite corde: on obtient 12.
- 2 fois, alors on ajoute cette différence à la longueur de la petite corde: on obtient 9.
- 3 fois, alors on ajoute cette différence à la longueur de la petite corde: on obtient 8.

Le rapport (logos) qui correspond à 1 fois sans reste est appelé double, son nombre est 1.

Le rapport qui correspond à 2 fois sans reste est appelé hémiole, son nombre est 2.

Le rapport qui correspond à 3 fois sans reste est appelé épitríte, son nombre est 3.

En langage moderne, le rapport double est $2/1$, le rapport hémiole est $3/2$, le rapport épitríte est $4/3$.

Les rapports qui définissent les intervalles consonants sont toujours de la forme $n+1 / n$, c'est à dire que le numérateur est toujours une unité de plus que le dénominateur.

On constate alors que ces longueurs mesurées produisent des sons consonants :

Si on prend comme référence la corde qui mesure 6 et qui produit le son aigu (nète) :

La corde qui mesure 12 produit le son de l'octave grave (hypate)

La corde qui mesure 9 produit le son de la quinte grave (mèse)

La corde qui mesure 8 produit le son de la quarte grave (paramèse)

En appliquant les mêmes règles aux autres longueurs de corde, on détermine les rapports suivant qui définissent les intervalles correspondants :

- entre 8 et 12 on a un rapport de nombre 2, donc $3/2$ qui définit une quinte.
- entre 9 et 12 on a un rapport de nombre 3, donc $4/3$ qui définit une quarte.

Entre 8 et 9, on a un nouveau rapport superpartiel, puisque $9 = 8 + 1$, il est donc de $9/8$ et il définit un petit intervalle, le ton, qu'on appelle épogde.

L'évolution du vocabulaire des intervalles musicaux

Selon les écrits de Philolaos, qui semble être le plus ancien Pythagoricien dont on ait quelques traces, l'arithmétique des rapports se déconnecte peu à peu du paradigme des longueurs de cordes. Cette mutation dans la représentation des rapports a dû se produire vers la fin du V^e siècle. Dans l'extrait attribué à Philolaos, on trouve un vocabulaire qui s'adresse à la fois au domaine mathématique, avec les noms des rapports, et au domaine musical avec les noms d'intervalles déterminés par ces rapports. Cependant la représentation qui consiste à attribuer un nombre plus petit à un son plus aigu persiste au IV^e siècle, notamment chez Archytas¹¹⁴.

Les traducteurs scolastiques des traités de musique ont nommé les intervalles en latin à partir des dénominations grecques des rapports, mais cette fois, la référence est le degré grave de la gamme, en conservant toutefois le rapport :

Noms anciens		Noms modernes		
<i>Rapport</i>	<i>Nom de l'intervalle</i>	<i>Nom de l'interval</i>	<i>Rapport</i>	<i>Exemple</i>
duplos double	diapason	octave	2/1	do3-do4
hémiole, sesquialtère	diapente	quinte	3/2	do-sol
épitrite, sesquiterce	diatessaron	quarte	4/3	do-fa
ditonos sesquiquarte	diton	tierce majeure	5/4	do-mi
sesquiquinte	diton mineur ou semi-diton	tierce mineure	6/5	do-mi $\flat$
épogde, sesquioctave	ton majeur	seconde majeure ou ton majeur	9/8	do-ré
sesquinone	ton mineur	seconde mineure ou ton mineur	10/9	ré-mi

On remarque que le numérateur dépasse le dénominateur d'une unité. Ces rapports, comme on l'a vu, sont dits *épimores* ou *superparticuliers* : ils sont de la forme $(n + 1) / n$ ou $1 + 1/n$.

Les intervalles épimores et leurs multiples sont considérés comme les seuls acceptables par l'harmonie occidentale, de l'Antiquité jusqu'au XVII^e siècle.

On remarque l'absence du 7. Les intervalles comprenant 7 sont exclus car ils sont considérés comme non consonants. Deux intervalles sont maudits jusqu'à Mozart : l'intervalle de septième mineure (deux quarts conjointes, rapport de $4^2/3^2 = 16/9$; exemple

¹¹⁴ DK 47 A 16, Ptolémée, *Harmoniques*.

do-sib), et le triton, diabolique, composé de trois tons, rapport de $9^3/8^3 = 729/512$; exemple do-fa#.

Toutefois, les rapports épimores sont consonants pour n compris entre 1 et 5. En effet, en dehors du 7 maudit, le rapport du ton, $9/8$ est bien épimore, mais pas consonant, de même que pour les valeurs de n supérieures.

Le ton majeur ($9/8$) et le ton mineur ($10/9$) ont été proposés par Ptolémée (II^{ème} siècle) et repris dans le système de Zarlino à la fin de la Renaissance. Ils ne diffèrent que d'un comma (dit syntonique = $81/80$) et sont généralement considérés, dans le phrasé musical, comme presque identiques. La différence est perçue sur les tierces : la tierce juste a un rapport de $5/4$, donc $80/64$, et la tierce pythagoricienne (ou plutôt platonicienne) de $81/64$: cette dernière paraît fausse à nos oreilles modernes. Les quintes sont toujours justes (sauf dans le tempérament mésotonique de la Renaissance). Le tempérament égal adopté pour les instruments d'aujourd'hui répartit l'erreur de justesse sur toutes les notes et la rend quasiment imperceptible, sauf pour une oreille très exercée. Nous reviendrons sur cette question essentielle pour la musique occidentale.

Rapports, proportions, médiétés

La musique n'est pas seulement, chez les Pythagoriciens, une source de plaisir pour celui qui chante, qui joue de la lyre ou qui écoute les plus talentueux ; c'est surtout une méthode d'approche de la partie des mathématiques qui traite des proportions. Lorsqu'on entend que la doctrine pythagoricienne accorde une grande importance à la musique, il s'agit plus précisément d'une partie de la théorie musicale, la théorie de l'harmonie. Dans le cadre de la numérologie pythagoricienne, l'harmonie permet d'aborder l'échelle non linéaire caractéristique de ce qu'on nomme aujourd'hui la gamme. En géométrie métrique la méthode de mesure consiste à établir une analogie entre deux domaines, la réalité mesurée d'une part, l'échelle des nombres d'autre part. En revanche, ici, on confronte la grandeur mesurée à la totalité de cette même grandeur : c'est la mesure d'un rapport.

Selon le papyrus Rhind qui comprend de nombreux passages à propos des mathématiques pratiquées par les Égyptiens du second millénaire av. J.-C., les premières expressions des proportions sont de la forme $1/n$. On envisage le tout et *une* partie du tout, et on réalise des opérations à partir de ces rapports élémentaires. Les mathématiciens grecs (Pythagoriciens) s'inspirent de ce système en créant d'abord les rapports dits *épimores* dans lesquels le numérateur excède le dénominateur d'une unité : $(n+1)/n$. Le nom du rapport est donné par le nombre présent au dénominateur.

La proportion est une égalité entre deux rapports dont l'expression est différente, par exemple $3/2 = 6/4$. L'utilité de la proportion est manifeste dans de nombreux problèmes, lorsqu'on cherche un quatrième membre répondant au troisième comme les deux premiers. Il s'agit d'une règle de trois : après avoir augmenté une quantité d'une

partie d'elle-même, par exemple 8 augmenté d'un huitième donne $9/8$, il faut trouver la quantité qui respecte ce rapport, appliqué à 24, c'est donc 27. Les Égyptiens avaient élaboré une méthode, dite de « la fausse position » qui leur permettait, par approximation, de trouver le terme manquant, les Grecs du VI^{ème} siècle ont probablement suivi cette méthode.

Le rapport est dénommé *logos* (λόγος), on dit aussi « raison », fait intervenir deux termes ; la proportion c'est l'*analogia* (ἀναλογία). Elle comprend au minimum trois termes qu'on suppose rangés en ordre décroissant ($a > b > c$). Dans les mathématiques grecques, on n'exprime pas les rapports comme des divisions, et on n'opère pas sur eux au moyen de multiplications ; on les définit entre eux comme des différences. Par exemple, on considère le *logos* présenté par la différence du premier terme et du second, puis du second avec le troisième : $(a - b) / (b - c)$. Quelques opérations sur les proportions vont donner corps à certaines *analogia* (proportions) aux propriétés particulières qu'on appelle les médiétés (μεσότης, *mésotès*), et dont l'apparition identifiée sous ce nom, date sans doute du V^{ème} siècle (peut-être Hippias). La première de ces médiétés qui met en jeu trois termes est ce qu'on appelle la médiété arithmétique (notre moyenne), c'est à dire que « le premier terme surpasse le second de la même quantité que le troisième surpasse le second »¹¹⁵. La seconde médiété, dite géométrique, est définie ainsi : « le premier terme est au second comme le second est au troisième ». Le « comme » exprime l'égalité des rapports. La troisième médiété, dite subcontraire puis harmonique à partir d'Archytas, est définie, entre a et c , comme suit : « quelle que soit la partie de lui-même dont le premier surpasse le second, le second surpasse le troisième de la même partie de ce troisième ». Généralement on note de cette façon les trois médiétés dites anciennes, entre trois termes a, b, c , tels que $a > b > c$:

la médiété est arithmétique si $(a - b) / (b - c) = 1$; d'où : $b = a + c / 2$

la médiété est géométrique si $(a - b) / (b - c) = a / b = b / c$; d'où $a / c = b^2$

la médiété est harmonique si $(a - b) / (b - c) = a / c$; on écrit aussi : $(1 / b) - (1 / a) = (1 / c) - (1 / b)$

On pense généralement que ces trois proportions particulières ont été identifiées en Grèce vers la fin du VI^{ème} siècle, de façon indépendante, et qu'au début du IV^{ème} siècle on les aurait rassemblées sous le terme médiétés. Archytas en donne les définitions précises dans un fragment transmis par Porphyre. Au III^{ème} siècle av. J.-C., Euclide formalise ces proportions (*Éléments*, livre V et suivants) ; par la suite les mathématiciens procèdent à l'inventaire de toutes les médiétés possibles, ils en trouvent alors onze possibles. Les néo-pythagoriciens des premiers siècles donnent le nom de médiété musicale à une proportion entre quatre termes, héritée, disent-ils, des Babyloniens, qui

¹¹⁵ Archytas dans Porphyre, *Comm. sur l'harmonique de Ptolémée*, DK 47 B2.

De l'impossibilité de partager de façon égale une octave ou une quarte

La partition de l'octave en intervalles déterminés par les nombres 6, 8, 9, 12 permet aux Pythagoriciens de contourner élégamment l'impossibilité de diviser l'octave en deux parties « égales ». En effet, l'octave est constituée de deux quarts qui encadrent un intervalle unique, le ton, suffisamment petit pour jouer ce rôle de séparateur.

Le problème posé est de diviser l'octave en deux intervalles « égaux ». Pour cela, il faut trouver un intervalle défini par un nombre qui, multiplié par lui-même, donne le nombre affecté à l'octave, c'est-à-dire 2. La médiété qu'on appelle la moyenne géométrique ($c/b = b/a \Leftrightarrow b^2 = ac \Leftrightarrow b = \sqrt{ac}$), appliquée aux intervalles, permettrait de diviser l'octave en deux parties « égales » : $a = 1$ (tonique), $c = 2$ (octave), et b est le nombre définissant l'intervalle cherché, soit $\sqrt{2}$. En appliquant le même calcul pour diviser la quarte en deux intervalles « égaux », on obtient $2 / \sqrt{3}$; ces opérations sont inconcevables à l'époque des Pythagoriciens qui ignorent les irrationnels. Par ailleurs, si on revient au domaine musical, l'intervalle constitué par le multiplicateur $\sqrt{2}$ (on sait le faire de nos jours, en multipliant la fréquence par 1,414) est proprement dissonant et très agressif à l'oreille ; c'est le triton, proscrit jusqu'au XVIII^{ème} siècle (*diabolus in musica*).

Toutes les constructions mathématico-musicales qui vont se succéder dans l'histoire de la théorie harmonique, depuis Pythagore jusqu'au XX^{ème} siècle, se résument à cette recherche désespérée du partage de l'intervalle en deux intervalles « égaux », exprimable par un rapport de nombres entiers, ce qui est impossible à cause de ces maudits $\sqrt{2}$ ou $\sqrt{3}$ qu'on ne peut pas éliminer. Ces recherches se résignent donc à diviser jusqu'à l'imperceptible des intervalles de plus en plus petits en deux parties inégales, mais proches de l'égalité, et à définir ces inégalités par des rapports de plus en plus petits, donc constitués de nombres de plus en plus grands ; par exemple, le rapport du comma dit pythagoricien, est égal à $3^{12} / 2^{19}$, soit 531 441 / 524 288 (= 1,0136)¹¹⁷.

Le comma « zarlinien », ou « syntonique », est, quant à lui, apparu à la Renaissance lorsqu'on a retrouvé et accepté la tierce juste dans le système harmonique à la place du diton pythagoricien. Ce comma égal à 81/80 (rapport entre une tierce juste et deux tons majeurs) soit 1,0125. La différence entre les deux commas (pythagoricien et syntonique) est défini par l'intervalle nommé « schisma » (à ne pas confondre avec le schisma des Grecs), lui-même égal à $3^{16} / (5 \times 2^{23})$, soit environ 1,001 086, intervalle purement mathématique et qui, lui, est musicalement réellement imperceptible ; c'est également approximativement le rapport entre une quinte pure et une quinte au tempérament égal¹¹⁸.

¹¹⁷ La différence entre deux sons séparés d'un comma est peu perceptible musicalement, en tant que sons isolés, pour une oreille normalement constituée ; mais lorsque ces deux sons séparés d'un comma sont joués simultanément, ils produisent des battements insupportables, par exemple 6 Hertz pour un *la* à 440 Hz.

¹¹⁸ Imperceptible musicalement, mais qui, sur un orgue, par exemple, fait entendre un battement de deux secondes un *la* à 440 Hz avec un autre *la* à 442 Hz.

Les Pythagoriciens ont donc déterminé que les intervalles musicaux consonants s'expriment selon des rapports spécifiques de nombres entiers construits sur la séquence 6, 8, 9, 12. Les successeurs, Hippias, Glaukos, Philolaos et Archytas (pour ceux que l'on connaît) vont explorer cette voie et la complexifier davantage en créant des intervalles nouveaux, parfois si petits qu'ils en deviennent imperceptibles à l'oreille, surtout avec les instruments de l'époque, et c'est Aristoxène, élève d'Archytas puis d'Aristote, qui mettra fin – provisoirement – à cette fuite en avant.

L'harmonie, un outil mathématique

La démarche des Pythagoriciens est avant tout mathématique : l'invention de cet appareil de mesure, le monocorde, permet les opérations sur les rapports. La division de l'octave en intervalles définis par des rapports permet de convertir une échelle logarithmique – l'échelle musicale qui définit l'octave comme le rapport double – en échelle linéaire. Or, la première opération consiste à juxtaposer des intervalles : que se passe-t-il lorsqu'on « ajoute » un intervalle à un autre ? On forme un nouvel intervalle qu'il est intéressant de confronter aux deux autres en cherchant une relation, la composition de rapports.

L'opération de composition de ces rapports définissant les intervalles simule une addition de ces intervalles juxtaposés et se calcule en multipliant les rapports entre eux. Par exemple, lorsque qu'on dit qu'une octave (de rapport de longueur de corde égal à 2) est composée d'une quinte ($3/2$) *plus* une quarte ($4/3$), on effectue en réalité une multiplication des rapports : $3/2 \times 4/3 = 12/6 = 2/1$, rapport de l'octave.

Les Pythagoriciens ont observé que les rapports de longueur de cordes définissant les intervalles consonants étaient tous de la forme $(n + 1 / n)$. En réalité, ils les définissent comme la somme d'un nombre et d'une partie de ce nombre (*epiméros logos*, ἐπιμερὸς λόγος). Ces rapports d'intervalles consonants font le bonheur des Pythagoriciens car ils sont définis par les nombres de la séquence magique, la *tétractys* : 1, 2, 3, 4 (séquence qui fascine les Pythagoriciens par ses curieuses propriétés, dont la plus évidente est la somme égale à 10).

On rapporte que sur son lit de mort, Pythagore aurait enjoint ses disciples de travailler sur le monocorde (μονοχορδίζετε, *monochordizete*, ordonne-t-il en inventant le verbe « monocorder »)¹¹⁹. Ce monocorde est un instrument qui n'est pas joué, mais qui représente le premier instrument de mesure des intervalles musicaux, et à ce titre, il a une importance considérable dans l'histoire des sciences. En effet, attribuer des nombres, ou plutôt des rapports de nombres aux intervalles musicaux, c'est réaliser une mesure, et cette démarche constitue un acte physico-mathématique, peut-être le seul que les

¹¹⁹ Aristide Quintilien, *Sur la musique*, livre III, ed. Jahn (1882), p.70 ; traduction et commentaire François Duysinx (Université de Liège), Droz, Genève, 1999, p. 181.

Pythagoriciens puissent revendiquer, dans le domaine de ce qu'on désigne souvent comme l'acoustique de Pythagore.

Les apports réels des Pythagoriciens : la mesure des intervalles et les rapports

Les Pythagoriciens ont introduit les nombres pour désigner la hauteur des sons, et les rapports pour mesurer les intervalles, on l'admet sans contestation historique. Par analogie, en se servant du monocorde, ils ont affecté aux longueurs de la corde des nombres entiers correspondant aux degrés. Ils ont donc créé une mesure de l'échelle musicale en attribuant à chaque niveau une grandeur. L'instrument de mesure monocorde va désormais se nommer le « canon » (κανών, *kanôn*, règle, modèle, principe). Cette introduction d'une démarche de mesure est très importante. La mesure est une comparaison, ou plutôt une modélisation, entre un domaine d'observation, la réalité, qui présente une grandeur variable, et un autre domaine, la représentation, qui a dans ce cas une structure numérique¹²⁰. Dans la musique, c'est une innovation essentielle et probablement la grande invention des Pythagoriciens : mesurer la hauteur du son en mesurant la longueur de la corde qui le produit par rapport à une longueur de référence.

La seconde innovation des Pythagoriciens, selon ce qu'on en sait, c'est la combinaison des rapports qui déterminent les longueurs de cordes correspondant aux intervalles musicaux de base. Il s'agit de l'octave et de la quarte, auxquels on ajoute un nouvel intervalle, le ton, (on l'appelle *épogde*), en passant de l'heptacorde à l'octocorde qui couvre une octave complète. La combinaison, ou la juxtaposition des intervalles, a nécessité la médiation d'une série de nombres qui ont la propriété de définir tous les rapports consonants par multiplication. Cette suite de nombres, qui, paraît-il, lui a été suggérée par « les Babyloniens », ou par les marteaux sonores des forgerons de la légende, c'est la célèbre séquence – une autre séquence magique, comme la *tétractys* – constituée par les nombres 6, 8, 9, 12. En effet, ce sont les plus petits nombres entiers qui respectent les proportions définissant l'octave ($6 \times 2 = 12$), la quinte ($6 \times 3 / 2 = 9$, et $8 \times 3 / 2 = 12$) et la quarte ($6 \times 4 / 3 = 8$, et $9 \times 4 / 3 = 12$).

Dès lors, on peut spatialiser les intervalles sur une droite, le monocorde par exemple, en affectant ces nombres d'une part aux longueurs des cordes, et d'autre part aux degrés de l'échelle musicale : entre 6 et 12 on a une octave ; entre 6 et 8 on a une quarte, ainsi qu'entre 9 et 12 ; entre 6 et 9 et entre 8 et 12 on a une quinte. C'est alors qu'un nouvel intervalle apparaît, entre 8 et 9. Ce nouvel intervalle, qui sépare les deux tétracordes, sera plus tard nommé le « ton ».

¹²⁰ Voir B. Vitrac, , « Les mathématiques dans le *Timée* de Platon : le point de vue d'un historien des sciences », in *Etudes platoniciennes* 2 (2006) 11-78.

Le mythe de Pythagore acousticien

Pour en finir avec Pythagore, il convient de mettre à plat les connaissances que nous avons sur le philosophe et sur ses travaux. L'histoire des sciences doit considérer *a priori* comme suspects tous les témoignages tardifs qui ont travesti la réalité historique en n'apportant aucune trace écrite qui pourrait corroborer les histoires qu'on a racontées. Les écrits suspects en question – ceux des néo-Pythagoriciens du II^e et III^e siècle, puis de Boèce au VI^e siècle – datent d'environ huit cent ans après les travaux de l'école pythagoricienne, et nous devons confronter ces écrits suspects avec ceux qui nous ont été transmis, écrits durant les périodes intermédiaires. Or nous avons peu de traces fiables, et celles dont nous disposons ne nous permettent pas d'affirmer que Pythagore fut ce génie de l'acoustique qu'on se plaît à décrire encore aujourd'hui. Il n'a, en particulier jamais inventé la gamme pythagoricienne, ni le comma, ni le cycle des quintes, et Pythagore n'a jamais décrit une physique des sons. Pour reprendre quelques mots écrits en 1904, année de sa disparition, par Paul Tannery, helléniste et historien des sciences¹²¹ :

L'œuvre de Pythagore en musique doit être rigoureusement limitée à la reconnaissance des rapports numériques concernant l'octave, la quinte et la quarte ; c'est-à-dire correspondant aux intervalles qui déterminent les sons fixes de la lyre, et qui sont exclusivement reconnus par les Grecs comme consonances.

Il semble bien que l'importance des contributions de Pythagore dans l'histoire de la théorie musicale soit bien inférieure à celle qu'on lui accorde généralement. Les historiens des sciences doivent souvent affronter les conteurs d'histoires et assumer une fonction bien plus impopulaire, celle de briseurs de mythes.

Jusqu'à la disparition de leur école, vers -450, les recherches des Pythagoriciens, souvent assimilées à des découvertes dans le domaine de l'acoustique, se résument à l'invention d'une nouvelle opération arithmétique, la composition de rapports par multiplication. On ne trouve aucune trace, chez les doxographes et chez les commentateurs de cette école, d'une quelconque étude sur la nature physique du son. En revanche, il est légitime d'accorder à l'école pythagoricienne – pourtant plutôt portée sur les spéculations que sur le travail d'atelier – la démarche typiquement physico-mathématique qui consiste à inventer un appareil, le monocrorde, véritable instrument de mesure des intervalles et outil servant à effectuer des opérations de calcul sur les rapports numériques.

¹²¹ Paul Tannery, « À propos des fragments philolaïques sur la musique », in *Revue de philologie*, 28, 1904, p. 239.

Chapitre 4

Les mathématiciens au service des musiciens : après Pythagore

L'assemblage des tétracordes : la construction de l'échelle harmonique grecque

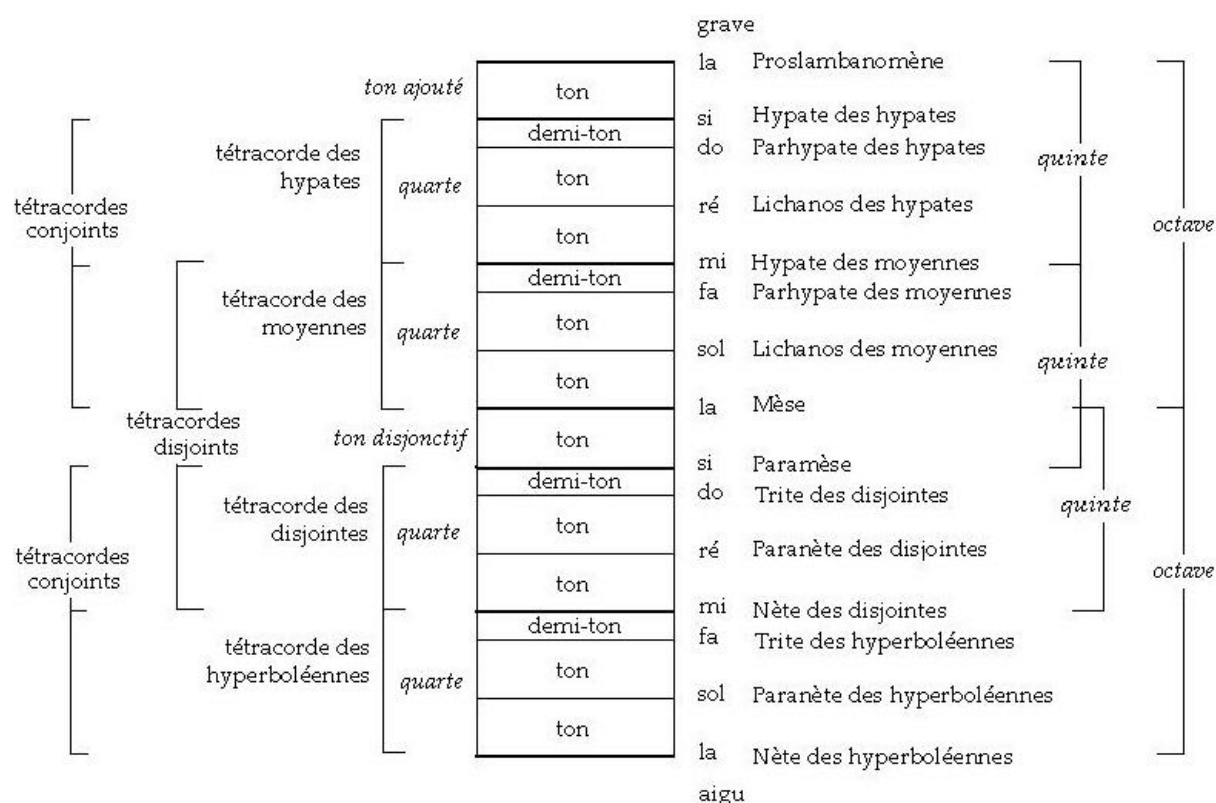
L'élément de base de l'échelle harmonique grecque est le tétracorde. À partir d'Aristoxène (IV^eme siècle av. J.-C.), probablement avant, on construit la totalité de l'échelle harmonique en juxtaposant plusieurs tétracordes ; à certains niveaux, ces tétracordes sont conjoints, à d'autres ils sont disjoints.

Il semble que l'octocorde n'ait pas été longtemps pratiqué au V^eme siècle. La transgression des sept cordes étant assumée, rien n'empêche d'en ajouter, et les musiciens sont demandeurs d'innovation. Une fois résolue la question de l'assemblage de deux tétracordes disjoints (octocorde), on a ajouté d'abord d'autres cordes, puis d'autres tétracordes, pour constituer des systèmes harmoniques plus larges.

C'est ainsi que, selon Nicomaque de Gêrase (II^eme siècle), l'assemblage de quatre tétracordes forme un système de quinze degrés qui, semble-t-il, a été en usage au moins dans le cadre de la théorie musicale ; ce qui ne signifie pas que les instruments comprenaient autant de cordes¹²². Le système d'assemblage des tétracordes faisait partie de la théorie, il servait aussi bien pour les lyres et les kithara que pour le chant et les auloi.

Pour établir une octave vers le grave à partir de la corde médiane, la *mèse*, les Grecs ont ajouté un degré nommé *proslambanomène*, distant d'un ton de l'*hypate des hypates*, ce qui a pour effet de créer une quinte avec l'*hypate des moyennes*. Le ton disjonctif, entre *mèse* et *paramèse*, permet d'établir deux quintes de part et d'autre, entre *paramèse* et *hypate des moyennes* et entre *nète des disjointes* et *mèse*.

¹²² Nicomaque de Gêrase, *Manuel d'harmonique*, 58.



Assemblage de quatre tétracordes composant un système à quinze degrés

Selon Nicomaque de Gérase (genre diatonique, mode phrygien)

Mathématiciens et musiciens

Les Pythagoriciens ont établi des correspondances entre le domaine des nombres et celui des intervalles. Mathématiciens avant tout, du moins si on en croit les textes postérieurs, il est normal qu'ils fassent de l'harmonie leur terrain de jeu favori pour étudier les *logos*, autrement dit les proportions, nos rapports. En théorisant les intervalles musicaux, ils s'emparent d'un domaine qui ne leur appartient pas, celui de la musique pratique. Or, si la littérature abonde sur les nombreux systèmes d'intervalles, on ne sait pas grand chose de la pratique des musiciens et des chanteurs, à propos de leur appréhension de la technique de division du tétracorde. On en sait un peu plus sur les théoriciens de la musique, et parmi eux ceux qui l'enseignent, qui trouvent leur place entre les mathématiciens et les musiciens. Leurs écrits, pour peu qu'il y en ait eu quelques uns, ne nous sont pas parvenus, en dehors des *Éléments harmoniques* d'Aristoxène, écrits plus d'un siècle après l'extinction de l'école pythagoricienne¹²³. On trouve toutefois de précieux enseignements sur les musiciens anciens dans le long « discours de Lysias », au début du

¹²³ Deux autres textes de théorie musicale ont longtemps été attribués à Euclide, et seraient donc un peu postérieurs à Aristoxène. Il s'agit de la *Division du canon* et l'*Introduction harmonique* qui serait d'un certain Cléonide inconnu par ailleurs. Paul Tannery propose une rédaction juste postérieure à Archytas et à Platon, donc antérieure à Euclide (sauf les deux propositions qui dateraient du III^e s.). Cependant, plusieurs chercheurs récents, dont André Barbera, la situent après le III^e siècle.

traité *De la musique* de Plutarque (pseudo). Héraclide du Pont, un peu postérieur à Platon, a également laissé de nombreux extraits à propos de l'harmonie, cités dans ce même *De la musique* attribué à Plutarque.

Aristoxène nomme ces anciens théoriciens de la musique les *harmoniciens*, et selon Théodore Reinach, musicologue et helléniste du XIX^{ème} siècle¹²⁴,

[Ces harmoniciens] sont les professeurs de musique et principalement d'harmonie (au sens antique) dont l'enseignement a fleuri au V^{ème} et au IV^{ème} siècles, depuis Lasos d'Hermione : Damon d'Athènes, Épigonos, Ératoclès, Pythagore de Zacynthe, Agénor de Mitylène, etc. Leur enseignement était surtout oral et Héraclide du Pont a pu fréquenter leurs cours, comme tant de beaux esprits du temps. Mais sans aucun doute quelques uns d'entre eux avaient aussi rédigé et publié des ouvrages techniques où des renseignements plus ou moins exacts, trouvaient place : Aristoxène fait allusion à des publications de ce genre et sa polémique même en présuppose l'existence.

Aristoxène se positionne par rapport à ses prédécesseurs comme un théoricien soucieux d'exactitude ; au début des *Éléments harmoniques*, on lit¹²⁵ :

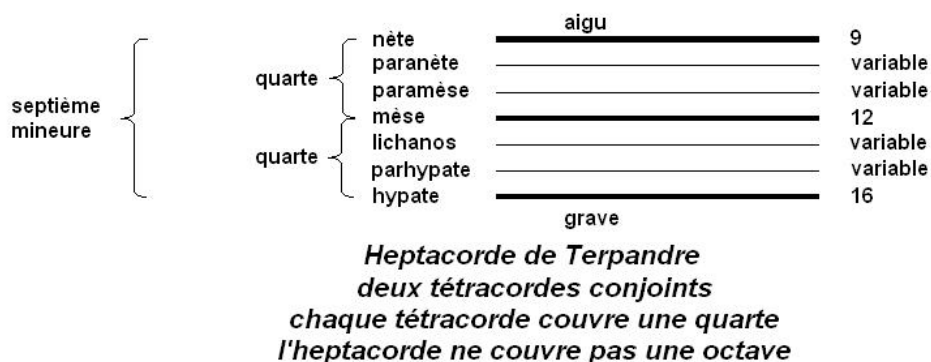
Il sera indispensable, si l'on ne veut pas faire comme Lasos et quelques autres musiciens, disciples d'Épigonos, qui pensaient que le son a une sorte de largeur [πλάτος, *platos*], de parler à ce sujet avec un peu plus d'exactitude [qu'ils n'ont fait].

Il semble donc, si on comprend le terme πλάτος comme une certaine « latitude » dans la justesse de la note, qu'il existait une manière d'envisager la musique qui n'était pas forcément fondée sur l'exactitude mathématique. Par ailleurs, Plutarque nous apprend que de nombreux musiciens avaient tendance à « relâcher », c'est-à-dire à abaisser la note, y compris les sons fixes qui encadrent les tétracordes. Les instrumentistes et les chanteurs ont une approche empirique de la musique, c'est l'oreille qui perçoit la justesse des intervalles et les consonances.

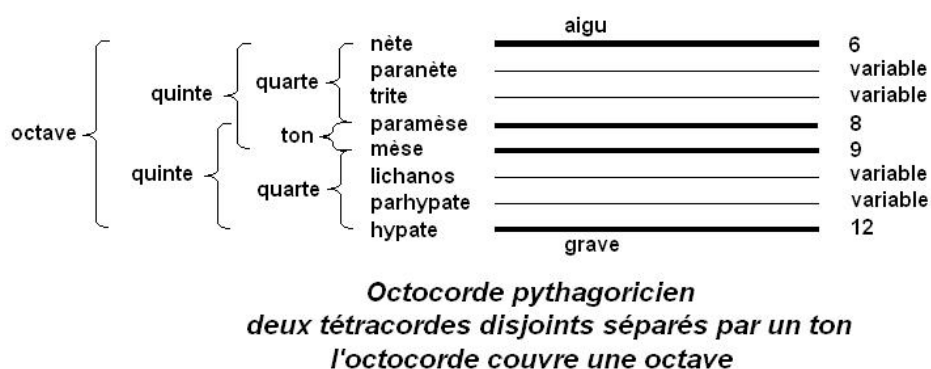
Avant la réforme pythagoricienne, celle qui a introduit un ton entre les deux quarts des tétracordes, on ne sait pas comment les musiciens accordent leur lyre heptacorde. On suppose ici que les deux tétracordes couvrent des quarts et donc que l'heptacorde ne couvre pas une octave.

¹²⁴ Théodore Reinach, introduction à « Plutarque, *De la musique* », édition critique et explicative par Th. Reinach et H. Weill, Leroux, Paris, 1900, p. XIII.

¹²⁵ Aristoxène, *Éléments harmoniques*, livre I, Traduction et notes de Ch.-Émile Ruelle, Paris, Pottier de Lalaine, 1871, I, 4, p. 4-5.



On connaît la succession de cordes en partant de l'aigu vers le grave : la *nète* (corde fixe), la *paranète*, la *paramèse*, la *mèse* (corde médiane), la *lichanos* (indicatrice), la *parhypate* et l'*hypate* (corde grave, fixe). L'adjonction d'une corde, la *trite*, entre la *paranète* et la *paramèse*, repousse en quelque sorte, le tétracorde aigu qui est à présent encadré par les cordes *nète* et *paramèse*. La création de cet octocorde pythagoricien ajoute donc, entre *paramèse* et *mèse*, un intervalle qui devient fixe et définit le ton, c'est généralement le schéma adopté par les historiens de la musique grecque.



Il existe, on l'a vu, une controverse depuis le XIX^{ème} siècle à propos de l'étendue de l'ancien heptacorde : couvre-t-il une octave, soit une quarte et une quinte, ou bien seulement deux quarts ? Selon Philolaos, dans l'extrait transmis par Nicomaque, l'heptacorde couvre une octave et ses deux tétracordes sont différents : le grave est une quarte, l'aigu une quinte. Cette quinte formée sur un tétracorde est curieuse ; elle est semble-t-il composée, en partant de l'aigu, d'un ton (*nète-paranète*), d'un ton et demi (*paranète-paramèse*) suivi d'un ton (*paramèse-mèse*). Cette division ancienne permettrait d'obtenir, outre la quinte entre *nète* et *mèse*, une quarte entre la *nète* et l'ancienne *paramèse* (parfois déjà nommée *trite*), ainsi qu'une quarte entre *paranète* et *mèse*. Nicomaque relève toutefois que certains contestent cette division¹²⁶.

Selon Plutarque, les musiciens avaient auparavant accès à quatre sons fixes, et ce serait Olympos, un maître de musique du VI^{ème} siècle, qui avait enseigné cette façon de procéder. L'heptacorde couvre une octave composée de deux tétracordes inégaux, une

¹²⁶ Nicomaque, 43.

quarte grave et une quinte aiguë. Les trois cordes restantes sont mobiles (*paranète* dans le tétracorde aigu, *lichanos* et *parhypate* dans le grave), et sont laissées à la « fantaisie » de l'instrumentiste, selon le climat recherché. Outre les deux sons extrêmes (*nète* et *hypate*), la *mèse* et la *paramèse* sont les deux cordes fixes intermédiaires, espacées d'un ton, bien avant la réforme pythagoricienne. La nouveauté du pythagoricien Philolaos n'aurait donc pas été l'ajout d'un intervalle de ton entre *mèse* et *paramèse*, mais d'une corde entre la *paramèse* et la *paranète* (un ton et demi), qui divise cet intervalle en un demi-ton (grave) et un ton (aigu). La confusion est favorisée par l'emploi du nom « *trite* » pour cette corde, qui est bien la troisième en partant de la *nète*, mais qui auparavant désignait la *paramèse*. Le nouveau système octocorde n'est donc pas, comme on le lit souvent composé de deux tétracordes séparés par un ton, mais d'un tétracorde grave et d'un pentacorde aigu, avec une corde commune. Le résultat est bien entendu identique, mais cette façon de voir différente à propos du processus historique de l'évolution amène à d'autres conclusions.

Philolaos et l'octocorde pythagoricien

L'école pythagoricienne primitive s'est éteinte vers le milieu du Vème siècle av. J.-C. et ses enseignements ont perduré grâce à des adeptes qui auraient transgressé la règle du secret, en transmettant certaines des connaissances produites par Pythagore et ses élèves. En musique, les travaux ont, semble-t-il, été poursuivis par Hippase, puis par Philolaos qui, selon la consigne du maître, auraient entrepris de « monocordiser », c'est-à-dire de travailler sur ce qu'on nommera bientôt le « canon musical ». On remarque qu'à la même époque, au début du Vème siècle, certaines expériences menant aux mêmes conclusions que celles des Pythagoriciens étaient effectuées par des non-Pythagoriciens comme Lasos d'Hermione qui procède à des mesures sur des flûtes et sur des récipients remplis d'eau pour déterminer les intervalles de quarte et de quinte.

On admet que Philolaos, membre important du courant pythagoricien à la fin du Vème siècle, a écrit un ouvrage, *περὶ φύσεως*, (*péri phuséôs*), *Sur la nature*, disparu depuis mais, semble-t-il, encore accessible aux premiers siècles. On considère cet ouvrage de nos jours comme le premier écrit pythagoricien, mais plusieurs des fragments qui subsistent sont suspects¹²⁷. Il serait notamment l'initiateur de la thèse qui introduit l'harmonie et le nombre dans la compréhension du monde.

¹²⁷ Walter Burkert, *Lore and Science in ancient Pythagoreanism*, Harvard University Press, 1972, chap. 9 et 10, p. 218-275.

Voir aussi Théon de Smyrne, *Exposition des connaissances mathématiques utiles pour la lecture de Platon*, ed. grec et trad. française J. Dupuis, Hachette, Paris, 1892, p. 175.

Pour la suspicion sur l'authenticité, voir Paul Tannery, « À propos des fragments philolaïques sur la musique », in *Revue de philologie*, 28, 1904, p. 233-249.

On rapporte que Platon lui aurait acheté trois livres qui consignaient ces savoirs occultes¹²⁸. En réalité, parmi les fragments de Philolaos dont nous disposons, il en existe peu qui traitent de l'harmonie et ils figurent chez des auteurs tardifs (Nicomaque, Boèce, Stobée). Cependant, on attribue généralement à Philolaos l'enseignement à Platon des connaissances pythagoriciennes sur l'harmonie.

On trouve deux allusions à Philolaos à propos de la division du ton, dans l'*Institutio musicae* de Boèce, mais qu'on ne peut pas attribuer à un pythagoricien, comme l'a remarqué Paul Tannery¹²⁹. Le plus connu, et donc finalement le seul fragment fiable concernant la théorie musicale, se trouve dans l'*Introduction harmonique* de Nicomaque de Gêrase, néo-pythagoricien du II^e siècle¹³⁰. Il a été recopié par Stobée au VI^e siècle¹³¹. Voici ce passage du traité de Philolaos¹³² :

Voici comment s'exprime Philolaos : La grandeur de l'harmonie (ἁρμονία) [octave] est d'une syllabe (συλλαβά) [quarte] et une dioxie (δι' ὀξείων) [quinte]. La dioxie surpasse la syllabe d'un épogde (ἐπόγδοον) [ton], car il y a de l'hypate à la mèse une syllabe, de la mèse à la nète une dioxie, de la nète à la trite une syllabe, et de la trite à l'hypate une dioxie. L'intervalle compris entre la trite et la mèse est épogde (ἐπόγδοον) [9/8]. La syllabe est un intervalle épitrète (ἐπίτριτον) [4/3], la dioxie est hémiole (ἡμιόλιον) [3/2] et le diapason (διὰ πασᾶν) [octave] est double (διπλόον). Ainsi l'harmonie comprend cinq épogdes et deux diésis ; la dioxie, trois épogdes et une diésis ; la syllabe, deux épogdes et une diésis.

Dans cette transcription, la trite est en réalité la paramèse avec laquelle elle est inversée.

Ce court texte est important, non seulement parce qu'on y trouve la division pythagoricienne de l'octave, mais surtout parce qu'il marque le passage du domaine musical à celui de l'arithmétique. Le domaine musical présente au sens de l'ouïe des consonances qui sont définies par les cordes fixes de la lyre (nète, mèse, trite, hypate). Le travail sur le monocorde permet la spatialisation : les intervalles deviennent des segments de droite plus ou moins longs qu'on peut mesurer. La mesure attribue, par analogie, des nombres aux sons en consonance. La comparaison entre deux longueurs crée une nouvelle longueur. Le nombre de fois où cette nouvelle longueur (différence) est comprise dans la petite longueur donne un nombre. Ce nombre fait partie d'un autre domaine, il n'est plus

¹²⁸ Diogène Laërce, *Vies*, VIII, 84-85, et III, 9 ; Aulu Gelle, *Nuits attiques*, III, 17, 4.

¹²⁹ Paul Tannery, op. cit.

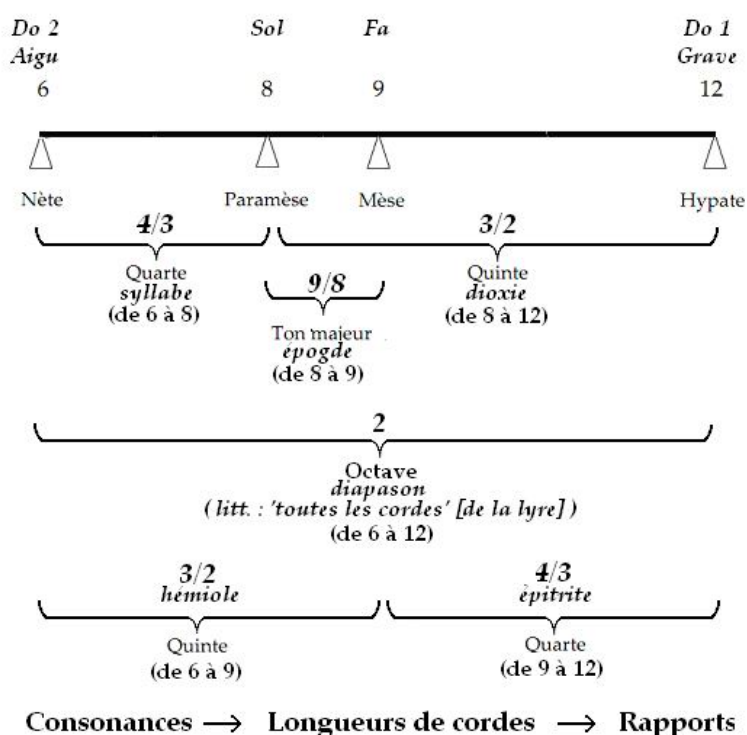
¹³⁰ Nicomaque de Gêrase, Ἀρμονικὸν ἐγχειρίδιον, *Harmonikon enchiridion*, « Manuel d'harmonique », in Karl von Jan, *Musici scriptores graeci*, Teubner, Leipzig, 1895, chap. IX, p. 252-253 ; traduction Ch. E. Ruelle, « Manuel d'harmonique de Nicomaque de Gêrase » in *Annuaire de l'Association pour l'encouragement des Études grecques en France* (1880), Paris, Baur 1881.

¹³¹ DK 44 B6 : Nicomaque, *Harmonikon enchiridion*, éd. Meibom, I, 17 ; Stobée, *Eclog.* I, XXII, 7.

¹³² Nicomaque de Gêrase, trad. Ch.-É. Ruelle, *idem*, chapitre IX, p. 27.

appliqué à une longueur, c'est une entité abstraite ; cette entité, c'est le *logos*, le rapport. Enfin, le nombre affecté à cette entité donne le nom du rapport.

On a procédé ainsi à plusieurs opérations, de plus en plus abstraites dans des paradigmes différents. Le domaine sensible définit des consonances entre des sons (*nète, mèse trite, hypate*) ; la mesure des longueurs de cordes affecte des nombres aux sons, c'est le domaine de la géométrie ; l'opération de différence entre 2 longueurs est du domaine de l'arithmétique ; et le dénombrement de cette différence dans la plus petite des deux longueurs crée un nouveau domaine, celui des rapports, l'harmonie.



Philolaos : la division pythagoricienne de l'harmonie

La création de deux vocabulaires appropriés, l'un du domaine musical (les noms d'intervalles), l'autre du domaine mathématique (les noms de rapports) marque la transposition entre les deux paradigmes.

On remarque que le ton ($9/8$) n'a pas reçu de nom d'intervalle, Philolaos le désigne sous son nom arithmétique *épogde* ; ce devrait être τόνοϛ, mais l'habitude semble ne pas encore avoir été prise de désigner cet intervalle de base. Par ailleurs, la diésis désigne chez les Pythagoriciens l'intervalle qui reste lorsqu'on retranche deux épogdes (deux tons) à une quarte, c'est à dire à peu de chose près un demi-ton d'aujourd'hui. Le vocabulaire changera au siècle suivant, on le verra.

Philolaos reprend et expose le problème de Pythagore pour déterminer le nouvel intervalle qui permet la construction de l'octocorde. Le problème étant d'obtenir 2/1 (l'octave) par le produit de 4/3 (la quarte) par lui-même puis par un rapport inconnu et à déterminer. De façon classique, on pose l'équation suivante :

$$4/3 \times 4/3 \times a/b = 2/1, \text{ d'où : } 16/9 \times a/b = 2, \text{ ou encore : } a/b = (2/1) / (16/9)$$

Nous savons, nous, qu'il suffit de multiplier le rapport du numérateur par l'inverse de celui qui est au dénominateur :

$$a/b = (2 \times 9) / (1 \times 16), \text{ soit } 18/16, \text{ et en simplifiant, } 9/8.$$

L'intervalle manquant pour faire une octave avec deux quarte est donc de 9/8, qu'on appelle le « ton » aujourd'hui et que Philolaos désigne par « épogde ».

Il est important de noter que la méthode employée par Philolaos n'est pas la multiplication de rapport que nous connaissons. Il procède par retranchement de la petite partie à la grande et considère le reste, comme l'explique Paul Tannery :

[...] si l'octave (ἁρμονία ou διὰ πασῶν) est composée d'une quarte (συλλαβή) et d'une quinte (δι' ὁξείων) et si l'on veut chercher la plus grande commune mesure (en supposant qu'il en existe une) entre la quarte et la quinte (et par suite aussi l'octave qui est leur somme), on n'a qu'à suivre le même procédé que pour les nombres en arithmétique et pour les longueurs en géométrie : on retranchera le plus petit intervalle du plus grand autant de fois que possible ; puis on retranchera le reste du plus petit intervalle, et ainsi de suite. On trouve de la sorte que la quinte contient une quarte plus un reste (qui est le ton majeur), que la quarte contient deux fois ce dernier intervalle, plus un second reste (δίεσις, diésis), que nous pouvons appeler la dièse diatonique.

On rencontre ici une source de confusion liée au vocabulaire : en effet, ici, la diésis correspond approximativement à notre demi-ton (256/243). Plus tard, au IV^{ème} siècle, et notamment chez Aristoxène, la diésis correspond au quart de ton qui apparaît selon deux formes, l'un chromatique, l'autre enharmonique, tandis que le ton est maintenant nommé (τόνος, *tonos*). Cet intervalle est considéré par Aristoxène comme le plus petit intervalle discernable par l'ouïe. L'emploi, au IV^{ème} siècle, de diésis (quart de ton) pour ce plus petit intervalle (intervalle-unité) est confirmé par Aristote : «καὶ ἐν μουσικῇ δίεσις, ὅτι ἐλάχιστον, [...] et en musique, la diésis, le plus petit [élément] ¹³³».

Une fois ce nouvel intervalle déterminé, le ton *épogde*, Philolaos l'utilise comme élément de base pour constituer la quarte. Il crée alors la division de la quarte selon le genre dit diatonique syntone, c'est-à-dire constitué de deux tons et d'un demi-ton.

¹³³ Aristote, *Métaphysique*, 10, 1053a 13.

Philolaos prend le rapport $9/8$ pour le ton, et nous avons $4/3$ pour la quarte ; il faut définir le rapport du demi-ton :

$$9/8 \times 9/8 \times a/b = 4/3, \text{ d'où on tire : } a/b = 4/3 \times 64/81 = 256/243.$$

Ce demi-ton n'est pas notre demi-ton moderne, il est très légèrement inférieur, d'un comma pythagoricien.

Archytas de Tarente et la division du tétracorde

Cicéron, mais c'est le seul témoignage, affirme que Philolaos était le maître d'Archytas¹³⁴. C'est sans doute pour cette raison qu'on a fait d'Archytas un pythagoricien, ce qui est loin d'être vérifié.

Poursuivant les travaux de son supposé maître Philolaos, Archytas introduit de nouvelles méthodes dans la détermination des intervalles qui partagent le tétracorde¹³⁵. Pour la première fois, on établit des règles quant à la détermination des intervalles qui composent chaque tétracorde, et qui était jusqu'alors laissée à l'appréciation musicale de l'interprète. Archytas propose d'employer les trois « médiétés » connues de son temps, la moyenne arithmétique, la moyenne géométrique, et la moyenne qu'il nomme harmonique. En appliquant ces méthodes de détermination des proportions qui créent les consonances, il fixe les trois « genres », c'est à dire des arrangements d'intervalles composant la quarte : les genres enharmonique, chromatique et diatonique. Il sera suivi par son compatriote, et disciple possible, Aristoxène qui crée véritablement la science de l'harmonie dans l'Antiquité grecque¹³⁶.

Le genre enharmonique est « à la mode » chez les musiciens anciens, jusqu'au milieu du IV^e siècle. Il est caractérisé par un découpage très irrégulier de la quarte : deux très petits intervalles (de l'ordre du quart de ton) dans la partie grave, suivis d'un grand intervalle qui peut dépasser la tierce majeure. On retrouve, de nos jours, ce type d'harmonie dans les musiques du Proche Orient. Le diatonique, à l'inverse, est plus équilibré et distribue la quarte en un petit intervalle de l'ordre du demi-ton, et deux autres proches du ton, mais qui ne sont pas forcément égaux pour autant. Le genre chromatique se situe moyennement, avec deux petits intervalles de l'ordre du demi-ton et un plus grand autour d'un ton et demi (tierce mineure).

¹³⁴ Cicéron, *De l'orateur*, III, XXXIV, 139.

¹³⁵ La principale innovation, et la seule connue, de Philolaos (porte-parole en quelque sorte des Pythagoriciens) est d'avoir substitué à l'ancien heptacorde de Terpandre composé de deux tétracordes conjoints, le nouvel octocorde constitué de deux tétracordes disjoints (deux quarts + un ton, donc une quarte + une quinte) dont l'intervalle intermédiaire détermine le ton (de rapport $9/8$).

¹³⁶ Aristoxène est qualifié de « disciple possible » d'Archytas car, d'une part nous n'en savons rien, mais d'autre part il est originaire de Tarente comme lui, il a écrit une *Vie d'Archytas*, et il est en conflit ouvert avec les théories mathématiques de celui-ci, privilégiant une approche auditive à la modélisation mathématique.

Nous avons peu d'informations sur la façon dont les cordes étaient choisies, et notamment sur leur grosseur. Des indications concernant les qualificatifs donnés à ces genres nous montrent que le diatonique est considéré comme « tendu », à l'inverse de l'enharmonique souvent décrit comme « relâché ». Comme il s'agit des cordes intermédiaires, on peut supposer que les trois cordes les plus graves, l'*hypate* fixe, et les deux suivantes, *parhypate* et *lichanos*, devaient être de même grosseur et que c'est leur tension, plus ou moins forte, qui hausse la note. Peu tendues, elles produisent un tétracorde enharmonique, fortement tendues, elles forment le diatonique. La corde supérieure du tétracorde est supposée plus fine, ainsi que les trois premières du tétracorde supérieur (de la *mèse* à la *nète*).

Nous devons ici faire une hypothèse, celle que les premiers travaux d'Archytas s'inscrivent dans la poursuite de ceux de Philolaos dans la construction de l'octocorde constitué de deux tétracordes formant chacun une quarte, séparés par un intervalle de 9/8 nommé épogde qui correspond à un ton majeur.

La théorie musicale d'Archytas nous a été transmise par un extrait de l'ouvrage perdu *περὶ μαθηματικῆς* (*péri mathèmatikès*, « sur les mathématiques ») que nous trouvons dans le traité de Porphyre déjà cité ¹³⁷ :

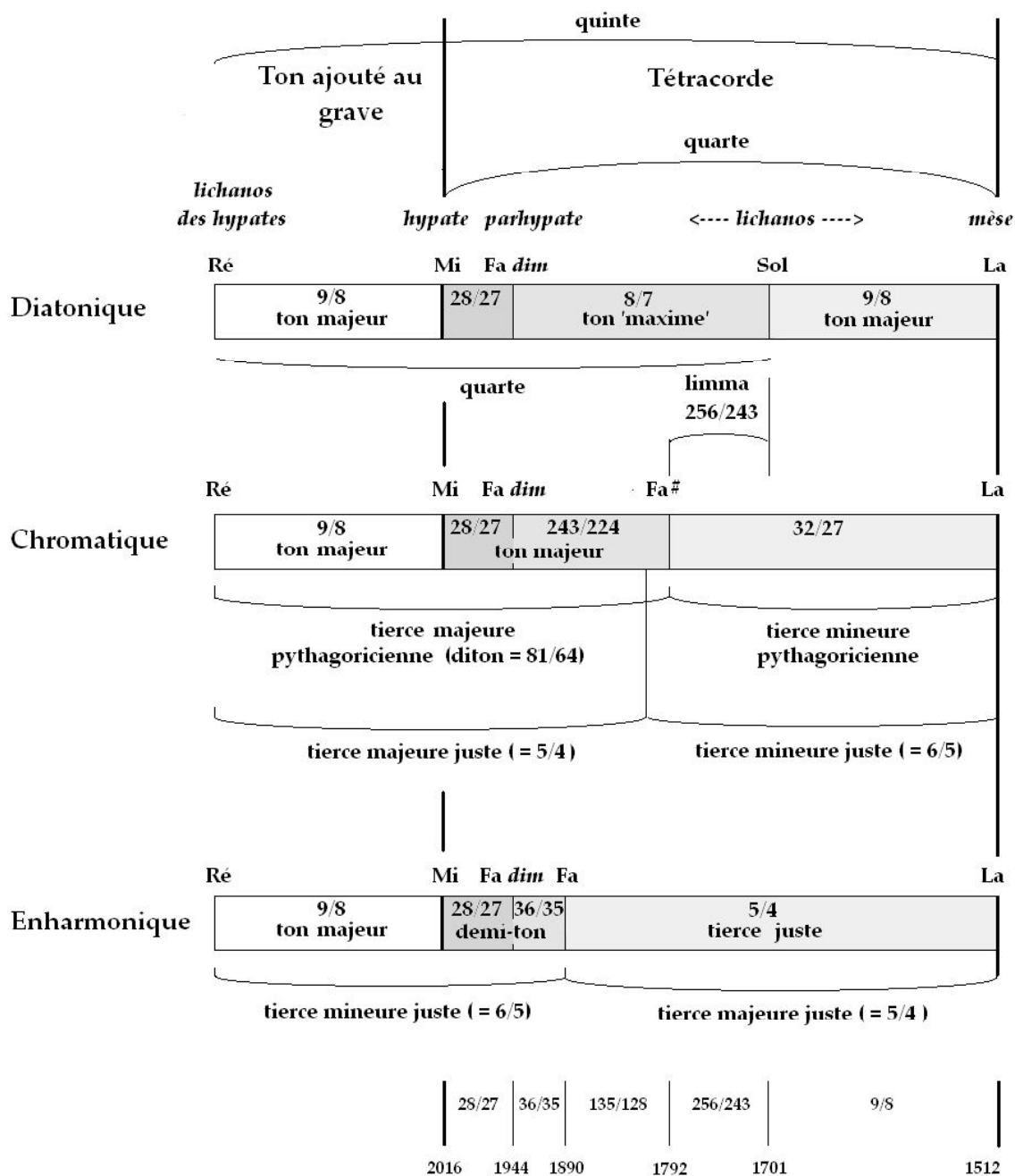
Et voici comment il divise [le tétracorde de] chacun de ces genres. Il établit pour ces trois genres que l'intervalle ultime est égal au rapport superpartiel de 28/27 ; l'intervalle moyen, quand il appartient au genre enharmonique, est de 36/35 et, pour le genre diatonique, de 8/7 ; de telle sorte que l'intervalle initial est, dans le genre enharmonique de 5/4, et dans le genre diatonique de 9/8. Dans le genre chromatique, il conçoit le second son à partir du plus aigu, au moyen du son qui occupe la même position dans le genre diatonique. Car pour lui, le second son à partir du plus aigu, dans le genre chromatique, est à son correspondant dans le ton diatonique dans le rapport 256/243. Il aboutit ainsi à la composition des trois tétracordes à partir des rapports de ces nombres premiers [entre eux]. Si nous représentons les sons les plus aigus des tétracordes par le nombre 1512, et si nous les rapportons aux plus graves avec lesquels ils sont dans le rapport de 4/3, nous obtiendrons le nombre 2016 – ce qui, selon le rapport de 28/27, donnera 1944. Les seconds sons seront obtenus ensuite à partir des plus graves [ainsi calculés]. Ainsi le second son [à partir du plus aigu] sera dans le genre enharmonique de 1890, qui est dans le rapport de 36/35 avec 1944, et dans le rapport de 5/4 avec 1512. Dans le genre diatonique, le second son sera le nombre 1701 qui est dans le rapport de 8/7 avec 1944, et dans le

¹³⁷ Archytas in Porphyre, *Commentaires sur les Harmoniques de Ptolémée* :

DIELS, Hermann, « Archytas, Fragmente B. 1 », in *Die Fragmente der Vorsokratiker*, Berlin, 1906, t 1, p. 257-261.

DUMONT, Jean-Paul, traduction française de H. Diels, *Die Fragmente der Vorsokratiker : Les présocratiques*, Gallimard-Pléiade, 1988. Archytas : p. 518-539 ; Archytas in Porphyre, *Commentaires sur les Harmoniques de Ptolémée*, d'après ed. Düring : p. 533-535.

rapport de $9/8$ avec 1512, et dans le genre chromatique, ce sera le nombre 1792, qui est dans le rapport de $256/243$ avec 1701.



Tétracordes d'Archytas

On remarque l'expression de ces rapports sous la forme $\frac{n+1}{n}$ [dénominateur en ordinal]. Il s'agit de ce qu'on nomme les rapports superpartiels ou épimores, c'est-à-dire ceux dont le numérateur dépasse le dénominateur d'une unité, comme $28/27$ ou $36/35$. Ces rapports sont de la forme générale $n+1/n$ ou encore $1 + 1/n$. Il s'agit d'une pratique des Pythagoriciens qui travaillent sur le monocorde. Appliqués à la musique, ces rapports

épimores expriment l'excès qui agrandit la corde la plus aiguë. En termes modernes, si la corde aiguë mesure 10cm et correspond à un « do », la note « ré » qui est un ton au-dessus forme un intervalle de $9/8$, c'est-à-dire $1/8$ d'excès, ce qui donne une corde de $10 + 1/8$ cm, soit 11,25cm. On trouve cette notion de rapports épimores dans la théorie de l'harmonie jusqu'à la Renaissance.

Voici comment les harmoniciens procèdent pour déterminer les intervalles composant la quarte : on prend un rapport superpartiel (épimore), donc de la forme $n+1/n$, et on double les deux nombres qui le composent ; le rapport est bien entendu inchangé.

Par exemple, $28/27$ devient $56/54$. On prend alors le terme impair situé entre les deux nombres, ici 55. On forme alors un produit de rapports égal au rapport initial : $28/27 = 56/55 \times 55/54$. On peut alors considérer que $28/27$ est l'assemblage (la « somme ») des deux intervalles $56/55$ et $55/54$.

C'est ainsi que les mathématiciens ont établi les rapports des intervalles de base des tétracordes : L'octave est de rapport $2/1$, donc $4/2$. En prenant 3 comme terme moyen, le rapport se décompose en $3/2$ et $4/3$ qui sont les rapports de la quinte et de la quarte.

De même, la quinte se décompose en : $3/2 = 6/4$, avec 5 comme terme moyen, d'où les deux intervalles de $6/5$ (tierce mineure) et de $5/4$ (tierce majeure). On montre de la même façon que la tierce majeure ($5/4$) est composée d'un ton majeur ($9/8$) et d'un ton mineur ($10/9$). C'est ici l'explication de l'emploi de ces rapports épimores.

Archytas procède de la même façon que Philolaos pour dénombrer ces rapports $9/8$ sur le tétracorde. Philolaos avait composé la quinte comme une quarte à laquelle on ajoute ce nouveau ton : le rapport est de $4/3 \times 9/8$, donc $36/24$, ou en simplifiant, $3/2$. Comme Philolaos, Archytas cherche donc combien de tons majeurs ($9/8$) remplissent la quarte. La somme (en fait un produit de rapports) de ces nouveaux intervalles (ton de $9/8$) engendre un reste qu'il faut définir. Il trouve qu'une quarte de rapport $4/3$ est composée de deux tons de $9/8$ et d'un intervalle dont il faut déterminer le rapport.

On a donc :

$$9/8 \times 9/8 \times a/b = 4/3, \quad \text{d'où} \quad 81/64 \times a/b = 4/3 ;$$

en multipliant $4/3$ par l'inverse de $81/64$ (division de rapports), on obtient a/b ;

$$a/b = 4 \times 64 / 3 \times 81, \quad \text{soit} \quad 256/243.$$

Cet intervalle encore inconnu des mathématiciens mais sûrement utilisé par les musiciens, est d'abord nommé *diésis* (δίεσις, « division, séparation »). Il est déterminé par le rapport $256/243$. Il est un peu inférieur à notre demi-ton ($16/15$) qu'on trouve entre *mi* et *fa*, ou entre *si* et *do*. On remarque que le vocabulaire évolue, lorsque que le ton majeur ($9/8$) sera lui-même partagé en deux demi-tons inégaux. Le rapport $256/243$ s'appellera

désormais le *limma* et son complément pour former un ton sera l'*apotome* (2187/2048). La composition (le produit) de ces deux rapports, *limma* plus *apotome* produit un ton majeur¹³⁸. En comparaison, notre demi-ton majeur se situe entre le *limma* et l'*apotome*.

Une partie de cette théorie a été reprise par Platon, qui en a souvent été présenté comme l'inventeur, dans *Timée*, 34c-36c.

De son côté, Archytas ne semble pas adhérer à ce système diatonique décrit et accepté par Platon. Le genre enharmonique qu'il propose est fondé sur un tétracorde composé d'un large diton, la tierce juste (5/4) ce qui constitue une innovation importante qui écarte délibérément la tierce pythagoricienne composée de deux tons majeurs. Ces deux tierces sont de rapports proches mais inégaux : la tierce pythagoricienne est $9/8 \times 9/8 = 81/64$, tandis que la tierce juste est de 5/4, soit 80/64.

Dans l'enharmonique d'Archytas, la présence de deux petits intervalles proches du quart de ton accentue le contraste harmonique, et c'est probablement l'effet recherché. Il ne faut pas oublier que les harmoniciens, mathématiciens ou musiciens, sont à la remorque de la pratique musicale et de l'évolution des canons esthétiques qui constituent une pression forte sur les évolutions de la théorie. Il semble qu'au temps d'Archytas, au début du IV^{ème} siècle, l'enharmonique était privilégié ; il sera abandonné à l'époque d'Aristoxène, un demi-siècle plus tard.

Archytas et la tierce juste

On peut également considérer Archytas comme un dissident du pythagorisme lorsqu'il introduit la quarte juste, qui correspond à l'harmonique 5, et qui donc est *naturellement* consonante à la place de la tierce pythagoricienne (deux tons) qui n'est pas naturelle, quoique calculée, et qu'on perçoit réellement comme fausse. Il s'agit principalement du courant représenté par Archytas de Tarente et, dans une moindre mesure par l'auteur de la *Division du canon* pourtant proche de Platon.

La problématique de la tierce est importante dans l'histoire de l'harmonie occidentale, et elle est souvent délaissée par les historiens de l'acoustique musicale. La

¹³⁸ Voici pour les calculs :

Sachant que : $8 = 2^3$; $9 = 3^2$; $256 = 2^8$; $243 = 3^5$; $2187 = 3^7$; $2048 = 2^{11}$.

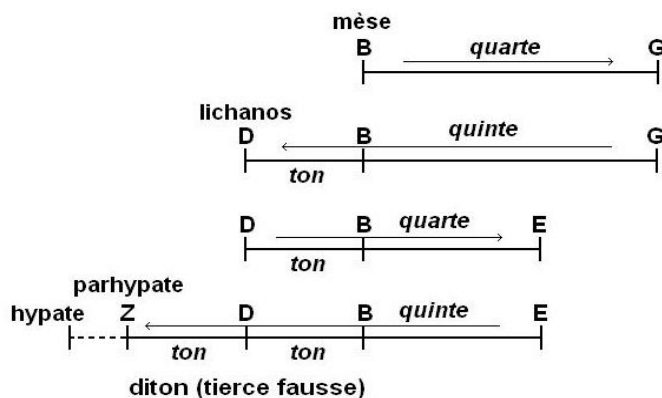
Si un ton est de 9/8, et le *limma* de 256/243, le complément du *limma* pour former un ton sera : 9/8 divisé par l'inverse de 256/243 (la division de deux rapports est égale au produit du rapport numérateur par l'inverse du rapport dénominateur).

Donc on obtient $9/8 \times 243/256$, ce qui est égal à $3^2 \times 3^5 / 2^3 \times 2^8 \times 2$. Ceci nous donne, pour cet intervalle nommé *apotome*, le rapport : $3^7/2^{11} = 2187/2048$. Nous pouvons vérifier qu'un *limma* et un *apotome* forment un ton majeur : $2^8/3^5 \times 3^7/2^{11} = 3^2 / 2^3 = 9/8$. Si nous allons encore plus loin, l'intervalle compris entre l'*apotome* et le *limma* détermine le *comma* pythagoricien :

$3^7/2^{11} \div 2^8/3^5 = 3^7/2^{11} \times 3^5/2^8 = 3^{12}/2^{19} = 531\,441/524\,288$.

tierce juste, définie par le rapport $5/4$, fait entendre l'harmonique 5 et sa consonance est naturelle ; ce n'est pas une convention culturelle, à l'inverse du diton pythagoricien (platonicien). Lorsque les instruments permettent d'ajuster la hauteur de son, comme ceux de la famille des violons, les musiciens jouent généralement la tierce juste. Cependant, la musique occidentale, jusqu'à la fin du XVI^{ème} siècle, impose le diton platonicien, qui sonne faux, pour des raisons plus idéologiques que musicologiques. Platon a suffisamment d'autorité pour que les théoriciens postérieurs fassent prospérer cette erreur musicale ; c'est le cas de l'auteur de la *Division du canon* qui est représentatif de ce qu'on enseigne en Grèce à partir du IV^{ème} siècle av. J.-C.¹³⁹ :

Théorème XVII – Les paranètes et les lichanos seront prises par consonance de la manière suivante : Soit B une mèse, surtendons à la quarte en G, et, à partir de G, relâchons à la quinte en D. L'intervalle BD est donc un ton. Maintenant, à partir de D, surtendons à la quarte en E, et, à partir de E, relâchons à la quinte en Z. L'intervalle ZD sera donc un ton ; ZB sera un diton ; donc D sera la lichanos. On prendra les paranètes de la même façon.



**Construction du diton
selon la *Division du canon***

Cette anomalie provient de la définition du ton inspirée des Pythagoriciens. En insérant un nouvel intervalle entre les deux tétracordes, ils définissent le ton comme la différence entre la quinte et la quarte, dont le rapport est sesquioctave, c'est à dire un neuvième ajouté à l'unité, donc $9/8$. Dès lors, la musicalité et l'harmonie, dont la justesse des tierces, sont délaissées au profit de l'exactitude : l'esthétique musicale fait place à l'esthétique mathématique. Une solution à ce problème sera proposée au II^{ème} siècle par Ptolémée, reprise à la Renaissance par Zarlino, c'est l'introduction de deux types de ton, le ton majeur à $9/8$ et le ton mineur à $10/9$ dont la composition forme une tierce juste à $5/4$.

¹³⁹Ps-Euclide, *La division du canon*, trad. Ch.-É. Ruelle, in *Annuaire des études grecques*, 1883, p. 315.

quarte 4/3					
Mi	Fa		Sol		La
Si	Do		Ré		Mi
0	100	200	300	400	500
demi-ton $\frac{12}{\sqrt{2}}$	ton $\frac{6}{\sqrt{2}}$		ton $\frac{6}{\sqrt{2}}$		
	tierce du tempérament égal ($\sqrt[3]{2}$)				
demi-ton 16/15	ton mineur 10/9		ton majeur 9/8		
comma syntone (zarlinien) = 81/80	→	tierce juste 5/4 (ou 80/64) (harmonique 5)			
limma 256/243	ton majeur 9/8 diton (81/64) : tierce de Platon (dissonante)		ton majeur 9/8		
Diatonique 'syntone' de Platon					

Représentation des différentes tierces :

tempérament égal (moderne)

tierce juste (Zarlin, XVIème s.)

tierce fausse, diton de Platon

Le seul promoteur de la tierce juste, parmi les auteurs connus du IVème siècle, est Archytas de Tarente, dont un des genres prévoit une tierce à 5/4.

Les pycnons des tétracordes d'Archytas sont tous formés d'un petit intervalle de 28/27, légèrement supérieur au quart de ton. Pour le genre enharmonique, cela lui permet de réhabiliter l'intervalle consonant de tierce majeure juste (5/4) refusé par les pythagoriciens, et surtout par les platoniciens. Archytas ne respecte pas non plus un des préceptes d'Aristoxène quant à la composition des tétracordes qui prescrit que l'intervalle aigu du pycnon doit être plus grand que le grave.

	cents	0	100	200	300	400	500
Tempérament égal (moderne)		demi-ton $\frac{12}{\sqrt{2}}$		ton $\frac{6}{\sqrt{2}}$		ton $\frac{6}{\sqrt{2}}$	
		Mi	Fa		Sol		La
		Si	Do		Ré		Mi
		← tierce mineure →			← tierce majeure →		
Diatonique		28/27	8/7 tierce mineure pyth.		9/8 ton majeur pyth.		
Chromatique		28/27	243/224 ton majeur pyth.		32/27 tierce mineure pyth.		
Enharmonique		28/27	36/35 demi-ton	5/4 tierce juste			

Tétracordes d'Archytas

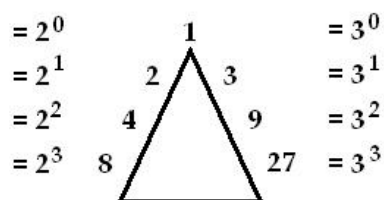
On observe l'introduction audacieuse de la tierce juste

Platon, successeur des Pythagoriciens : la gamme diatonique du *Timée*

Dans le célèbre passage de *Timée* où l'harmonie du monde créé par le démiurge est exposée par la succession de nombres déterminés par les médiétés, Platon se rallie au pythagorisme et s'attribue la division du tétracorde de Philolaos en fixant les rapports qui le constituent : c'est le système diatonique composé de deux tons égaux ($9/8$ et $9/8$) et d'un nouvel intervalle, légèrement plus petit qu'un demi-ton moderne, qu'on nommera bientôt la diésis, puis le limma, est dont le rapport est de $256/243$. Le produit des trois rapports est bien égal à $4/3$, rapport de la quarte.

Du tout il sépara d'abord une partie [= 1] ; après celle-là, il en retira une autre, double [= 2], puis une troisième, une fois et demie plus grande que la seconde, et triple de la première [= 3], puis une quatrième, double de la seconde [= 4], puis une cinquième, triple de la troisième [= 9], puis une sixième, octuple de la première [= 8], et enfin une septième, vingt-sept fois plus grande que la première [= 27]. Cela fait, il remplit les intervalles doubles et triples, en coupant encore des portions du mélange primitif et les plaçant dans ces intervalles de manière qu'il y eût dans chaque intervalle deux médiétés, l'une surpassant les extrêmes et surpassée par eux de la même fraction de chacun d'eux [= médiété harmonique], l'autre surpassant un extrême du même nombre dont elle est surpassée par l'autre [= médiété arithmétique]. De ces liens introduits dans les premiers intervalles résultèrent de nouveaux intervalles de un plus un demi [= $3/2$], un plus un tiers [= $4/3$], un plus un huitième [= $9/8$]. Alors le dieu remplit tous les intervalles de un plus un tiers [= $4/3$, quarte] à l'aide de l'intervalle de un plus un huitième [= $9/8$, ton], laissant dans chacun d'eux une fraction telle que l'intervalle restant fût défini par le rapport du nombre deux cent cinquante-six au nombre deux cent quarante-trois [= $2^8 / 3^5$, diésis]. De cette façon le mélange sur lequel il avait coupé ces parties se trouva employé tout entier.

Le début de l'exposé de Platon définit les nombres qui partagent l'entier en deux séries : les puissances de 2, et celles de 3, généralement représentées par le triangle :



Platon, *Timée*, 35b-36b

Chaque doublet de nombres consécutifs est alors soumis aux médiétés harmoniques et arithmétiques, définies comme suit :

Soient 3 nombres entiers naturels tels que $a > b > c$:

Le diton dissonant : la fausse tierce de Platon

Il est à peu près certain que parmi les intervalles formés par ces cordes, tant sur l'heptacorde ancien que sur l'octocorde, on trouvait la tierce juste, absente des systèmes mathématiques hérités du pythagorisme et mis en forme, semble-t-il, par Platon¹⁴⁰. Cette tierce juste est presque égale à deux tons, mais, tandis que ce diton est franchement dissonant, la tierce juste est « agréable à l'oreille » car elle est formée de l'harmonique 5 et constitue une consonance *naturelle*. Les musiciens jouent juste, et donc, jouent la tierce juste, n'en déplaise aux mathématiciens et aux platoniciens. Car c'est à Platon qu'on doit ce diton si déplaisant qui va accompagner la musique occidentale jusqu'à la Renaissance.

Or, il est probable que ce système s'inspire d'une division diatonique en usage depuis les temps les plus anciens, en acceptant la tierce dans l'harmonie. Pour les musiciens, cette tierce est juste (elle a pour rapport $5/4$ et non $9/8 \times 9/8$ comme le diton de Platon) et cela leur convient parfaitement¹⁴¹. La pratique du chant montre que *naturellement* la voix se positionne sur le degré correspondant à un intervalle juste, donc ici $5/4$, et non sur un intervalle calculé qui sonne faux ($9/8 \times 9/8$). Pour les musiciens, l'intervalle de ton $9/8$ est un outil (il n'est pas consonant) pour créer d'autres intervalles à partir du degré sur lequel on se place. Cet intervalle peut donc subir une certaine flexibilité, c'est la largeur dont parle Lasos, cité par Aristoxène.

Cependant, en dépit des efforts réalisés par les théoriciens de la musique pour accorder l'exactitude mathématique à la pratique musicale, le pythagorisme s'est imposé aux musiciens à la faveur de l'autorité intellectuelle de Platon. Se rangeant auprès des mathématiciens, celui-ci dénonce avec malice ces musiciens et idéalise l'approche mathématique de l'harmonie dans un extrait qui suit un passage célèbre dans lequel Platon se rapproche des Pythagoriciens¹⁴² :

531c – τοὺς γὰρ ἐν ταύταις ταῖς συμφωνίαις ταῖς ἀκουομέναις ἀριθμοὺς
ζητοῦσιν, ἀλλ' οὐκ εἰς προβλήματα ἀνίσχουσιν, ἐπισκοπεῖν τίνες σύμφωνοι
ἀριθμοὶ καὶ τίνες οὐ, καὶ διὰ τί ἑκάτεροι.

[...] ils [les musiciens] cherchent des nombres dans les accords perçus par l'oreille, mais ils ne s'élèvent pas jusqu'aux problèmes, qui consistent à se demander quels sont les nombres harmoniques et ceux qui ne le sont pas, et d'où vient entre eux cette différence.

Ces musiciens dont parle Platon sont formés aux mathématiques, mais ils cherchent à les appliquer (dirait-on de nos jours) à la pratique. Loin, cependant, d'adopter les

¹⁴⁰ Archytas, on le verra, est à l'origine de l'introduction du rapport $5/4$ dans les divisions du tétracorde qu'il propose, mais ses systèmes ne sont pas repris, et même combattus par les platoniciens.

¹⁴¹ Même si, mathématiquement on ne peut pas la diviser en deux tons égaux, car leur rapport serait alors l'irrationnel $(\sqrt{5})/2$.

¹⁴² Platon, *République*, VII, 531c, trad. R.Baccou.

approximations de Lasos, ils cherchent à théoriser ce qu'ils entendent et ce qu'ils jouent ou chantent. On comprend que cette démarche ne convienne pas à Platon. Pour le philosophe des Idées, l'important est de déterminer les nombres et les rapports entre eux, et c'est cette harmonie mathématique porteuse de Beauté qui doit s'appliquer à la musique, en dépit de ses dissonances. Platon est à la recherche d'une harmonie numérique, et non d'une musique consonante.

C'est ainsi que Platon est à l'origine de la problématique de la gamme et de la complexité de la théorie harmonique occidentale.

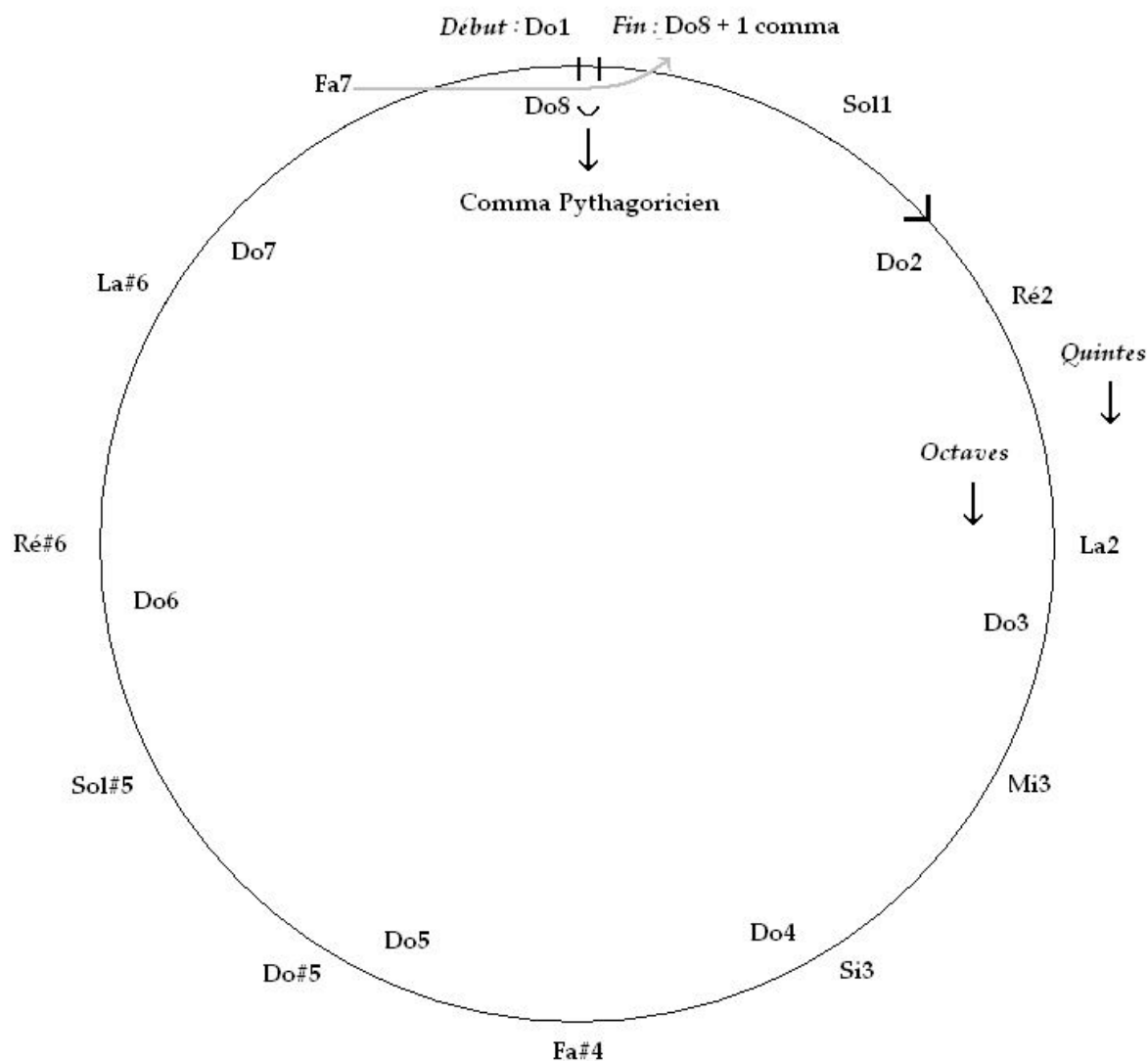
Le modèle platonicien n'est pas seulement à l'origine de la problématique de la tierce, mais également de celle de l'octave. Pour les musiciens, la quarte c'est deux tons et demi, et la quinte trois tons et demi. C'est simple et efficace : l'octave comprend 6 tons. Encore une fois, la valeur du ton comme intervalle importe peu puisqu'il n'est pas consonant : il n'entre dans la mélodie que comme passage d'un degré à un autre mais son utilité est de construire des intervalles consonants plus grands que le ton. Pour les mathématiciens, il en est autrement : l'octave ne peut pas être égale à six tons de rapport $9/8$.

En effet, six tons successifs produisent un rapport de $(9/8)^6 = 531\,441 / 262\,144$. Cette valeur est supérieure à 2, rapport de l'octave, qui en ramenant le dénominateur au précédent, est égal à $524\,288 / 262\,144$. L'intervalle entre ces deux degrés, très proches et quasiment imperceptible lorsqu'on les entend successivement, constitue le comma pythagoricien, $1/9$ de ton. Ce comma pythagoricien est en réalité la « différence » entre les degrés atteints par une série de douze quintes successives et une série de huit octaves successives. Par une de ces rencontres fortuites que les mathématiques se plaisent parfois à nous proposer, on se retrouve *presque* sur la même note. C'est à partir de cette quasi-coïncidence qu'à partir du XVIII^{ème} siècle, on a représenté ces deux successions d'intervalles parallèles par le cycle des quintes.

Ce n'est pas Platon qui expose cette question, mais l'auteur de la *Division du Canon*. Il soulève l'anomalie en remarquant que 531 441 n'est pas le double de 262 144, à partir du calcul des rapports épimores (l'unité plus une partie de l'unité). En se ralliant ainsi au limma platonicien décrit dans *Timée*, l'auteur de la *Division du canon* définit l'octave platonicienne, héritée de Philolaos, qui comprend donc cinq tons majeurs et deux limmas (un limma est déterminé par le rapport $256/243$). Pour sa part, Aristoxène, en musicien affirmé, enseigne que l'octave est constituée de 6 tons, c'est la division de l'octave des musiciens : une quarte de deux tons et demi conjointe à une quinte de trois tons et demi.

Contrairement à ce qu'on lit généralement, les Pythagoriciens n'avaient pas effectué ce calcul, ils se sont contentés, et c'est là le cœur du problème, d'affirmer la nécessité des quintes justes et des octaves doubles. La suite, c'est le platonisme qui l'a réalisé par la domination des mathématiques exactes sur l'empirisme musical qui, pour sa part, sait très

bien gérer ces petits décalages par la pratique de l'instrument ou de la voix. Le dogmatisme ambiant des méthodes d'enseignement au Moyen Âge a fait le reste : la théorie musicale doit être parfaite et cette perfection a un prix, la complexité.



12 quintes successives ne coïncident pas avec 7 octaves successives

Les degrés sont tellement proches que cette quasi-coïncidence a troublé les mathématiciens depuis toujours

Le comma pythagoricien est égal à l'excès de 12 quintes sur 7 octaves.

Son rapport est le rapport des deux séries

$$12 \text{ quintes} = \left(\frac{3}{2}\right)^{12} \quad 7 \text{ octaves} = 2^7$$

$$1 \text{ comma pythagoricien est donc égal à } \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{12}}{2^7} = \frac{3^{12}}{2^{19}} = \frac{531\,441}{524\,288} = 1,0136$$

Cycle des quintes

Aristoxène de Tarente

On ne sait pas si Aristoxène proposait un diton tempéré en tierce juste, mais compte tenu de la primauté qu'il accorde à la musicalité en regard de l'exactitude mathématique, on peut le penser. Par la suite, c'est la diton platonicien qui s'impose.

L'autre conséquence de la rigidité du ton à $9/8$ est que l'assemblage de six tons est supérieur à une octave d'un micro intervalle nommé aujourd'hui le comma pythagoricien. Pour Aristoxène, l'octave « mesure » six tons en dépit des considérations des mathématiciens.

Aristoxène s'oppose au courant platonicien. Il se place dans la lignée d'un certain Ératoclès qu'il cite à plusieurs reprises, qui aurait correctement décrit les intervalles, mais sans approfondir suffisamment ; ceci montre qu'il existait des théoriciens de la musique qui ne pythagorisaient pas. Ce que reproche le maître de musique aux harmoniciens, c'est leur déconnexion avec la réalité de la pratique musicale.

Il existe, dans la musique grecque, des intervalles très petits, notamment dans le genre dit « enharmonique », qui forment ce qu'on appelle le pycnon (de πυκνός, « dru », « serré ») composé de deux de ces micro-intervalles à côté d'un intervalle de plus d'un ton, voire de deux, pour compléter la quarte. La quête de ces harmoniciens est de créer des assemblages inédits avec des intervalles difficiles à discerner. Aristoxène, pour sa part, affirme que¹⁴³ :

La voix ne peut faire entendre correctement, ni l'oreille sentir distinctement, un intervalle plus petit que le diésis minime (quart de ton), pour que l'on reconnaisse quelle fraction de diésis ou d'un autre intervalle connu serait celui dont il s'agit.

Et il poursuit¹⁴⁴ :

[les harmoniciens] veulent montrer que [dans le chant] les sons qui ne sont séparés entre eux que par l'intervalle minime [quart de ton ou plus petit encore] se placent successivement les uns après les autres.

La voix est loin de pouvoir chanter successivement vingt-quatre diésis [quart de ton], elle n'est pas capable, quelque effort qu'elle fasse, de chanter musicalement un troisième diésis. Dans l'aigu, le plus petit intervalle qu'elle puisse chanter [après deux diésis] est le reste de la quarte. Tous les intervalles plus petits que celui-là, elle ne peut les chanter ; [...] Dans le grave, elle ne peut chanter [à la suite] de deux diésis un intervalle plus petit que celui d'un ton.

¹⁴³ *ibid.*, I, 46.

¹⁴⁴ *idem*, I, 98-99.

On est bien loin des dissections d'intervalles pratiquées par tous les théoriciens de la musique grecque, de Philolaos à Ptolémée, qui ont tant passionné nos aînés (Gevaert, Ruelle, Tannery, et plus près de nous, Huffman, Barker et bien d'autres).

Que Platon ait été influencé et formé à l'harmonie par son ami Archytas n'est qu'une hypothèse. Elle s'établit notamment sur la forte impression, à la lecture de Platon, de son peu d'intérêt pour la théorie musicale, en dehors des célèbres passages où il traite le sujet d'une façon plus morale et esthétique que mathématique. À une époque où la théorie harmonicienne était un thème majeur de la production philosophique, il serait étonnant que Platon, s'il avait réellement une théorie à exposer, n'ait pas écrit un ouvrage exclusivement centré sur la question.

L'Antiquité tardive, à qui on doit tout ce qu'on connaît de la musique grecque, voit se développer une pensée néo-platonicienne teintée de pythagorisme et les théoriciens de la musique associent alors Platon et Pythagore dans une même démarche qui aurait été transmise par Philolaos. Selon Paul Tannery, Archytas aurait été à l'origine d'une autre filiation qui serait à l'origine des tierces majeures et mineures de notre harmonie moderne, le système aristoxénien étant définitivement disqualifié. Le raccourci semble un peu rapide, et si, en effet, l'harmonie occidentale est bien fondée sur le diatonisme de Platon, c'est plutôt dans la tradition musicale arabe, avec ses micro-intervalles dérivés des pycnons grecs, qu'il convient d'observer l'héritage d'Archytas.

Quoi qu'il en soit, ce système diatonique qui fondera l'harmonie de Ptolémée (largement inspiré par Didyme), de Boèce et de la musique occidentale entre en conflit avec le système enharmonique d'Archytas qui invente, ou plutôt réhabilite, la tierce juste naturelle aux côtés de deux intervalles proches du quart de ton qui, lui, formera la base des systèmes musicaux arabo-musulmans à partir du IX^{ème} siècle. Ces deux systèmes harmoniques cohabitent encore de nos jours et ce conflit apparent est dépassé par les musiciens contemporains qui ont largement apprivoisé les micro-intervalles et les harmonies non platoniciennes.

De leur côté, jusqu'à la fin de la Renaissance, les harmoniciens et les enseignants de la musique se fourvoient avec ce diton faux, uniquement pour se plier au dogme platonicien qui ne pouvait être que parfait. Vers 1560, Zarlino, puis Mersenne (1636) seront les initiateurs de la révolution musicale qui réintroduira la tierce juste ($5/4$) grâce à la redécouverte des deux tons mineur ($10/9$) et majeur ($9/8$) issus du système de Ptolémée.

Annexes

Les systèmes d'intervalles divisant la quarte dans l'Antiquité

Philolaos

Une quinte = une quarte ($4/3$) + un ton ($9/8$) : $4/3 \times 9/8 = 3/2$ car $36/24 = 3/2$

Une octave = une quarte ($4/3$) + un ton ($9/8$) + une quarte ($4/3$) : $4/3 \times 9/8 \times 4/3 = 2$

Une octave = une quarte ($4/3$) + une quinte ($3/2$) : $4/3 \times 3/2 = 2$

Enharmonique d'Archytas

Le genre enharmonique divise la quarte en un grand intervalle d'environ deux tons, et deux petits intervalles inégaux qui forment ensemble environ un demi-ton.

L'enharmonique d'Archytas introduit une innovation : la tierce majeure juste qui disparaît avec lui et ne réapparaît qu'à la Renaissance avec Zarlino.

Une quarte = un diton (intervalle de deux tons majeurs = une tierce majeure juste, de rapport $5/4$) + un petit quart de ton ($36/35$) + un grand quart de ton ($28/27$)

$(5 \times 36 \times 28) / (4 \times 35 \times 27) = 4 / 3$

Chromatique d'Archytas

le genre chromatique divise la quarte en un intervalle plus grand que le ton (généralement environ un ton et demi ou une tierce mineure), et deux diésis inégaux qui forment ensemble environ un ton majeur ($9/8$).

Une quarte = un petit ton et demi ($32/27$) + un presque trois quart de ton ($243/224$) + un grand quart de ton ($28/27$)

$(32 \times 243 \times 28) / (27 \times 224 \times 27) = 4 / 3$

Diatonique d'Archytas

Une quarte = un ton majeur ($9/8$) + un grand ton ($8/7$) + un grand quart de ton ($28/27$) :

$(9 \times 8 \times 28) / (8 \times 7 \times 27) = 4 / 3$

Diatonique de Platon s'inspirant d'Archytas

Le genre diatonique divise la quarte en deux intervalles d'environ un ton chacun et un intervalle d'environ un demi-ton.

Le diatonique de Platon est le genre qui ressemble le plus à notre intervalle de quarte moderne : un ton majeur + un ton majeur + un demi-ton (toutefois plus faible que notre demi-ton). C'est le diatonique dénommé « pythagoricien » de nos jours.

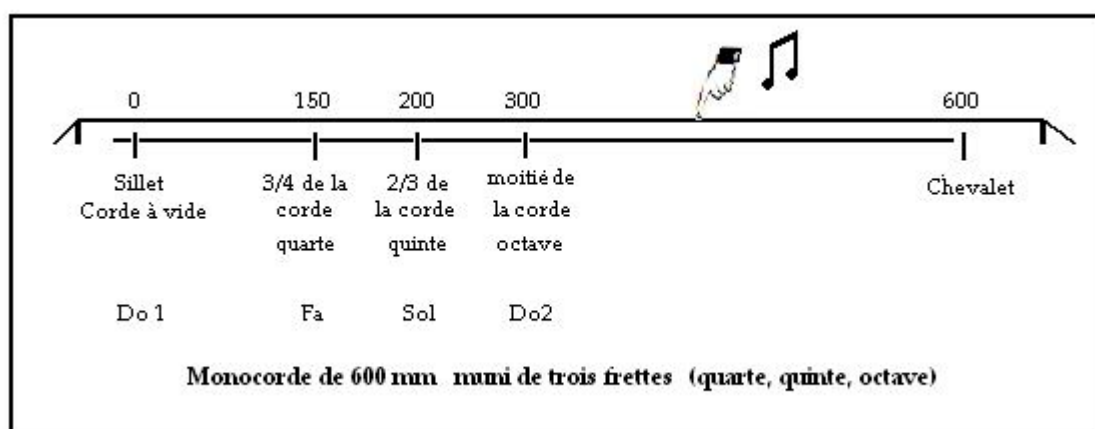
Une quarte = deux tons majeurs ($9/8$) + un petit demi-ton (limma : $256/243$)

$9 / 8 \times 9 / 8 \times 256/243 = 4/3$

La quarte moderne s'inspire de la quarte diatonique platonicienne, il suffit de diminuer d'un comma l'un des deux tons majeurs et d'attribuer ce comma au limma (petit demi-ton) pour l'augmenter.

Tableau de la gamme dite pythagoricienne complète

Nom de la note	Rapport de l'intervalle	Valeur de l'intervalle (en cents)	Nom de l'intervalle
do. $\natural$	1/1	0000	
do. +	531 441/524 288	23,5	Comma pythagoricien
ré. $\flat$	255/243	90,2	Limma. Seconde mineure
do. $\sharp$	2 187/2 048	113,7	Apotomé
ré. $\natural$	65 536/59 049	180,5	Dilimma. Seconde neutre ; 3ad
ré. $\natural$	9/8	203,9	Ton maj. Seconde majeure
ré. +	4 782 969/4 194 304	228	Seconde majeure + comma
mi. $\flat$	32/27	294,1	Tierce mineure
ré. $\sharp$	19 683/16 384	317,6	Seconde augmentée
mi. $\natural$	8 182/6 561	384,4	Tierce neutre. 4a diminuée
mi. $\natural$	81/64	407,8	Tierce majeure. Diton
mi. +	43 046 721/33 554 432	432	Tierce majeure + comma
fa. $\natural$	2 097 152/1 594 323	474	Quarte neutre
fa. $\natural$	4/3	498	Quarte juste
fa. +	177 147/131 072	521,5	Tierce augmentée. 4a + c
sol $\flat$	1 024/729	588,3	Quinte diminuée
fa $\sharp$	729/512	611,7	Quarte augmentée. Triton
sol $\natural$	262 144/177 147	678,5	Sixte diminuée. 5a neutre
sol $\natural$	3/2	702	Quinte juste
sol +	1 594 323/1 048 576	726	Quinte juste + comma
la. $\flat$	128/81	792,2	Sixte mineure
sol $\sharp$	6 561/4 096	815,6	Quinte augmentée
la. $\natural$	32 768/19 683	882,4	Septième diminuée. 6a neutre
la. $\natural$	27/16	905,9	Sixte majeure
la. +	14 348 907/8 388 608	930	Sixte majeure + comma
la. $\sharp$	8 388 608/4 782 969	972	Septième mineure – comma
si. $\flat$	16/9	996,1	Septième mineure
la. $\sharp$	59 049/32 768	1 019,6	Sixte augmentée
si. $\natural$	4 096/2 187	1 086,3	Octave diminuée. 7a neutre
si. $\natural$	243/128	1 109,8	Septième majeure
do. $\natural$	1 048 576/531 441	1 176,5	Neuvième diminuée. 8a neutre
do. $\natural$	2/1	1 200	Octave juste



Les cordes de la lyre ancienne

Dans un souci de compréhension, la représentation proposée place l'aigu en haut et le grave en bas, selon les conventions adoptées en occident depuis la Renaissance.

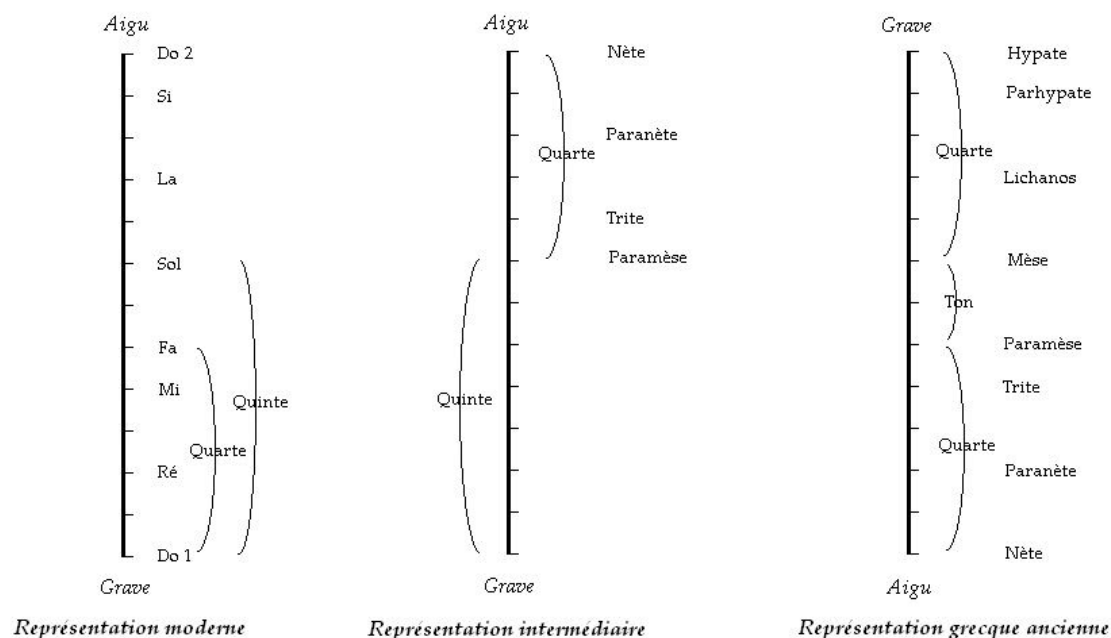
Lyre heptacorde de Terpandre (deux tétracordes conjoints) - 7 cordes

Quarte descendante supérieure	{	Nète		9
		Paranète		variable
		Trite ou Paramèse		variable
Quarte descendante inférieure	{	Mèse		12
		Lichanos		variable
		Parhypate		variable
		Hypate		16

Lyre des Pythagoriciens (deux tétracordes disjoints) - 8 cordes

Quinte	{	Quarte	Nète		6
			Paranète		variable
			Trite		variable
			Paramèse		Nouvel 8
Quinte	{	Quarte	Mèse		Intervalle 9
			Lichanos		variable
			Parhypate		variable
			Hypate		12

Les représentations de la hauteur du son



Le grave est en bas
La quarte et la quinte
sont 'montantes'

La quarte s'exprime par $3/4$ de
la longueur de corde
qui produit le son Do 1 (tonique)
(la quinte = $2/3$, l'octave = $1/2$).

Mais la quarte s'exprime
par $4/3$ de la **fréquence**
du son de la tonique (Do1)
(la quinte = $3/2$, l'octave = 2)

Cette représentation n'a pas existé, elle est
proposée pour faciliter la visualisation des
deux inversions subies par les représentations

Le grave est en bas
La quarte est 'descendante' et
forme une quinte 'montante'

Le degré (la note) atteint par une quarte
'descendante' est le même que celui d'une
quinte 'montante' de l'octave grave.
On dit que la quinte est le renversement de
la quarte

La quarte est visuellement 'montante', mais
musicalement 'descendante' (vers le grave)

Plus la corde est longue vers le haut,
plus le son est grave

La quarte s'exprime par le rapport $4/3$ de la
longueur de corde qui produit le son de la nète
(la quinte = $3/2$, l'octave = 2)

On retrouve finalement les mêmes rapports
que ceux qui déterminent les fréquences.

Au sein de l'octave, les rapports exprimant
les intervalles sont compris entre 1 et 2.

Les deux inversions intervenues lors du
passage de la représentation grecque ancienne à la représentation moderne

Intervalles et rapports numériques

L'intervalle de ton et ses divisions

Le ton pythagoricien est l'excès de la quinte sur la quarte.

Son rapport est de $(3/2) / (4/3) = (3/2) \times (3/4) = 9/8$.

Le ton $9/8$ est l'intervalle fixe qui sépare deux tétracordes dits alors disjoints.

A la Renaissance on le nommera « ton majeur » pour le distinguer du « ton mineur » de rapport $10/9$.

L'assemblage d'un ton majeur et d'un ton mineur forme la tierce juste de rapport $5/4 = (9/8) \times (10/9)$, rejetée par les pythagoriciens / platoniciens.

Le comma pythagoricien est l'excès de douze quinte sur sept octaves :

$$3^{12}/2^{19} = 531\,441/524\,288.$$

Le comma zarlinien ou syntone est l'excès de deux tons majeurs sur une tierce juste :

$$\text{deux tons (tierce pythagoricienne)} : 9/8 \times 9/8 = 9^2/8^2 = 81/64$$

$$\text{tierce juste} : 5/4, \text{ donc } 80/64.$$

Ce comma est donc égal à $81/80$. C'est également la différence entre le ton majeur et le ton mineur : $(9/8) / (10/9) = 81/80$.

On considère en général que le ton comprend 9 commas. Les valeurs exactes sont :

1 ton majeur = 9 commas Pythagoriciens

1 ton majeur = 9,48 commas zarliniens (ou syntoniques)

1 ton majeur = 8,69 commas modernes (tempérament égal)

Le limma (défini par Platon dans Timée) est le rapport résultant de cinq quarte mises bout à bout (mi-la-ré-sol-do-fa). Son rapport est de $256/243$, légèrement plus petit qu'un demi-ton.

L'apotome est le complément au limma pour faire un ton. Son rapport est de

$$(9/8) / (256/243) = 2187/2048.$$

Le comma enharmonique est l'excès d'une octave sur trois tierces justes. Son rapport est de $128/125$.

Unité de mesure normalisée : le cent

L'unité normalisée des physiciens de la musique est le « cent » : l'octave est divisée en 1200 cents, l'échelle est linéarisée, on peut ajouter les cents lorsqu'on compose les intervalles.

Pour convertir un rapport a/b en cents, on opère ainsi : $1200 \times \log_2 (a/b)$.

Un demi-ton en tempérament égal vaut 100 cents.

Le ton majeur pythagoricien et moderne $9/8$: 204 cents.

Le comma zarlinien : 21,5 cents.

Le comma pythagoricien : 23,46 cents.

Le schisma est le rapport entre les commas zarlinien et pythagoricien : $3^8 / 2^{15} = 1,95$ cents.

Limma : 90,2 cents

Apotome : 113,7 cents

Ton mineur moderne $10/9$: 182 cents

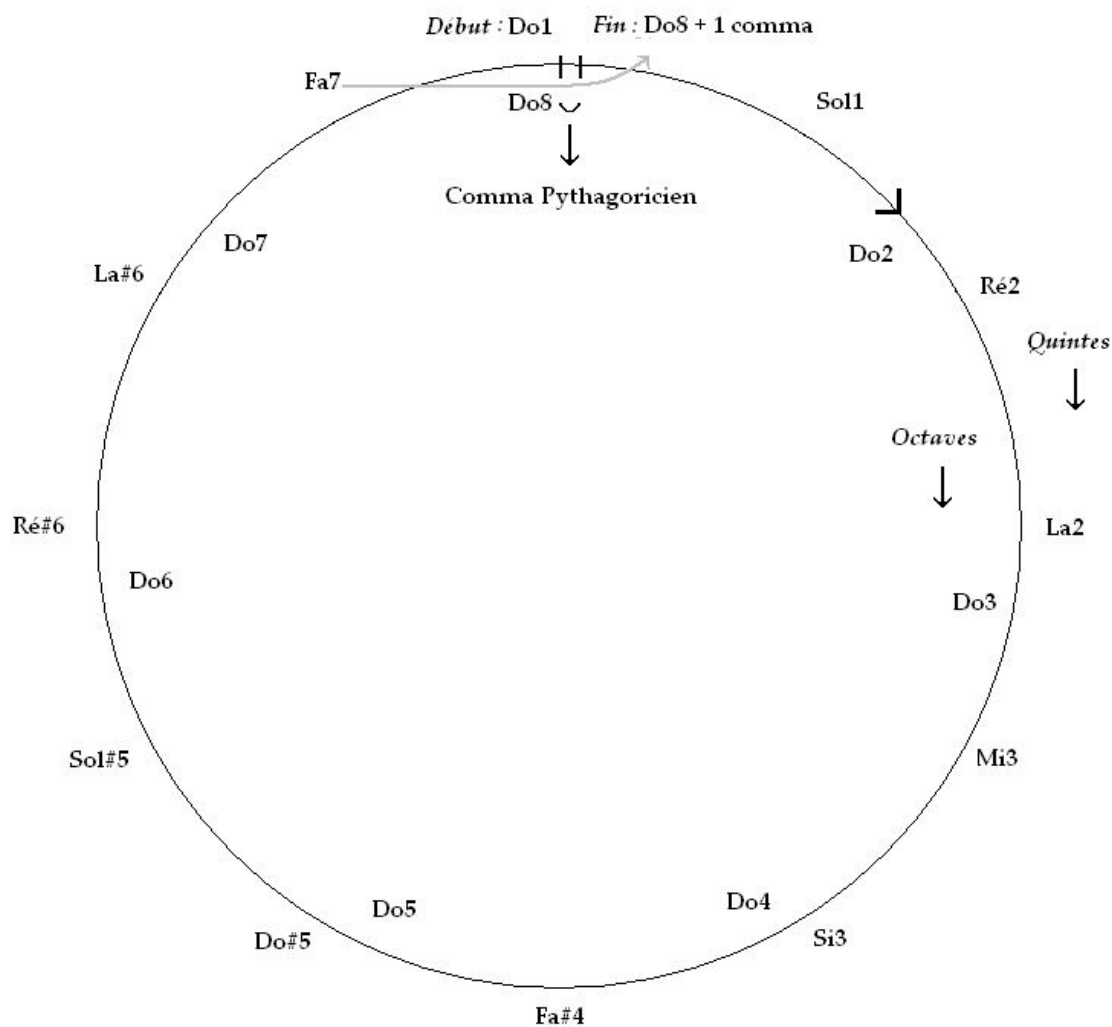
Demi-ton diatonique moderne $16/15$: 107,5 cents

Tierce majeure juste $5/4$: 386 cents

Tierce majeure platonicienne (dison) $81/64$: 408 cents

Quarte juste $4/3$: 498 cents

Cycle des quintes



12 quintes successives ne coïncident pas avec 7 octaves successives

Les degrés sont tellement proches que cette quasi-coïncidence a troublé les mathématiciens depuis toujours

Le comma pythagoricien est égal à l'excès de 12 quintes sur 7 octaves.

Son rapport est le rapport des deux séries

$$12 \text{ quintes} = \left(\frac{3}{2}\right)^{12} \quad 7 \text{ octaves} = 2^7$$

$$1 \text{ comma pythagoricien est donc égal à } \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{12}}{2^7} = \frac{3^{12}}{2^{19}} = \frac{531\,441}{524\,288} = 1,0136$$

Cycle des quintes

Quelques systèmes de division du tétracorde

Le tétracorde forme une quarte ; une quarte pythagoricienne (juste) vaut 498 cents.

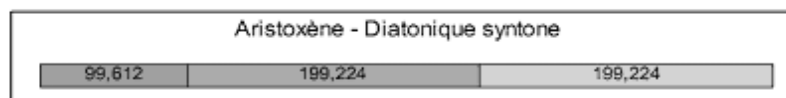
Genre diatonique

Deux intervalles aigus d'environ un ton chacun et un intervalle grave d'environ un demi-ton. Les diatoniques syntones sont composés de deux tons et d'un demi-ton.

Genre dominant jusqu'à
la Renaissance.
Dorien (mi-fa-sol-la)



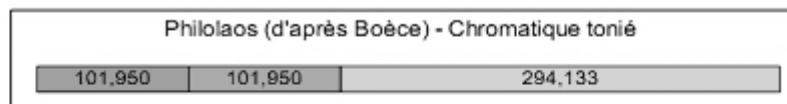
Diatonique très proche du
tempérament égal moderne



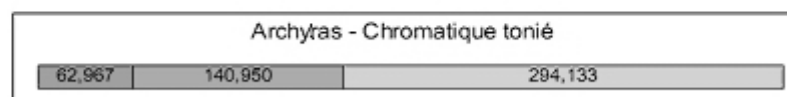
Genre chromatique

Un grand intervalle aigu d'environ un ton et demi (une tierce mineure) et deux intervalles graves formant le « pycnon » d'environ un ton.

2 petits demi-tons majeurs +
une tierce mineure 32/27



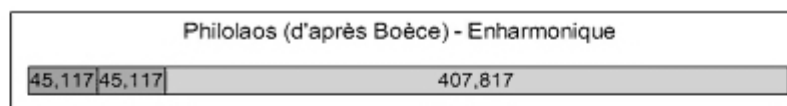
1 double demi-ton mineur +
2 commas et deux tiers +
une tierce mineure 32/27



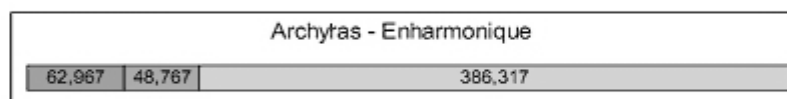
Genre enharmonique

Un grand intervalle aigu d'environ deux tons (une tierce majeure) et deux micro-intervalles graves qui forment le « pycnon » d'environ un demi-ton.

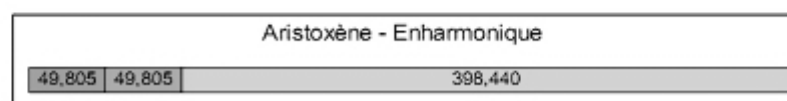
2 demi-limma (schisma) +
Diton majeur



2 intervalles formant
un demi-ton majeur +
une tierce majeure (5/4)



2 quart de ton aristoxéniens +
un diton majeur



Les Tétracordes de l'Antiquité

Tableau réalisé à partir des données recueillies par Paul Tannery, « Sur les intervalles de la musique grecque », in *Revue des études grecques*, 1902, t 15, p. 336-352. Les dénominations des genres sont celles indiquées par Paul Tannery.

Extrait de l'introduction de Paul Tannery :

Dans son important mémoire *Anonymi Scriptio de Musica* (Berlin, 1841), Bellermand a donné (p. 69) un tableau comparatif des longueurs théoriques des cordes d'un tétracorde grec, suivant les différents genres et nuances définies par Aristoxène et par Ptolémée. Je crois intéressant de donner ci-après, comme contrepartie, les nombres représentant les intervalles des sons de ces mêmes cordes, si l'on prend la même unité qu'Aristoxène, à savoir le douzième du ton tempéré, ou la soixante douzième partie de l'octave. J'ai été conduit à calculer avec une approximation ($1/1000$ de cette unité) beaucoup plus grande qu'il n'eût été pratiquement besoin, ces nombres, lesquels sont proportionnels aux logarithmes des rapports numériques.

Bien entendu, l'intérêt qu'ils offrent est simplement de permettre d'évaluer combien de fois un intervalle est contenu dans un autre, quelle fraction il en est, en supposant des expériences acoustiques régulièrement faites. Cependant la comparaison de ces nombres pourra peut-être conduire à des conclusions un peu plus importantes pour l'histoire de la musique grecque, si elle amène, d'une part, à écarter, comme de pures fantaisies arithmétiques, certaines compositions du tétracorde qui nous ont été transmises ; si, d'un autre côté, ce qui est plus douteux, elle nous permet de porter un jugement précis sur le degré d'exactitude des évaluations d'Aristoxène. Je ferai donc suivre de quelques observations sur ces sujets le tableau que je donne et où j'ai d'ailleurs introduit quelques compositions tirées de Boèce et d'Aristide Quintilien.

J'ai classé ces diverses compositions en suivant l'ordre de décroissance de l'intervalle supérieur du tétracorde ; lorsque l'intervalle est le même, l'ordre suit la décroissance de l'intervalle moyen.

On remarquera que la somme des intervalles ne fait pas exactement 30 unités suivant l'hypothèse aristoxénienne (il aurait fallu prendre pour unité le trentième de la quarte). Mais la différence, $1/250$ environ de la valeur des nombres donnés, est pratiquement tout à fait négligeable, puisqu'elle n'atteint pas, pour la quarte, un cinquième du comma.

[...]

Nom (Tannery)	Théoricien	rapport	en cents	rapport	en cents	rapport	en cents
Chromatique tonié	Archytas	28/27	62,967	243/224	140,950	32/27	294,133
Diatonique mol	Archytas	28/27	62,967	8/7	231,167	9/8	203,917
Enharmonique	Archytas	28/27	62,967	36/35	48,767	5/4	386,317
Chromatique mol	Aristoxène		66,408		66,408		365,244
Chromatique mol	Aristoxène		74,709		74,709		348,642
Chromatique tonié	Aristoxène		99,612		99,612		298,836
Diatonique mol	Aristoxène		99,612		149,418		249,030
Diatonique syntone	Aristoxène		99,612		199,224		199,224
Enharmonique	Aristoxène		49,805		49,805		398,440
Chromatique tonié	Boèce	256/243	90,233	81/76	110,300	19/16	297,517
Enharmonique	Boèce	512/499	44,533	499/486	45,700	81/64	407,817
Chromatique mol	Didyme	16/15	111,733	25/24	70,683	6/5	315,633
Diatonique syntone	Didyme	16/15	111,733	10/9	182,400	9/8	203,917
Enharmonique	Didyme	32/31	54,967	31/30	56,767	5/4	386,317
Chromatique mol	Eratosthène	20/19	88,800	19/18	93,617	6/5	315,633
Enharmonique	Eratosthène	40/39	43,717	39/38	45,083	19/15	409,250
Diatonique syntone	Platon	256/243	90,217	9/8	203,917	9/8	203,917
Chromatique tonié	ps Philolaos		101,950		101,950	32/27	294,133
Enharmonique	ps Philolaos		45,117		45,117	81/64	407,817
Chromatique mol	Ptolémée	28/27	62,967	15/14	119,450	6/5	315,633
Chromatique syntone	Ptolémée	22/21	80,550	12/11	150,633	7/6	266,867
Diatonique homale	Ptolémée	12/11	150,633	11/10	165,017	10/9	182,400
Diatonique mol	Ptolémée	21/20	84,467	10/9	182,400	8/7	231,183
Diatonique syntone	Ptolémée	16/15	111,733	9/8	203,917	10/9	182,400
Enharmonique	Ptolémée	46/45	38,050	24/23	73,683	5/4	386,317
Chromatique tonié	Quintilien	18/17	98,967	17/16	104,950	32/27	294,133
Tempérament égal			99,610		199,220		199,220
arabo andalou	Zalzalien moderne		147,070		147,070		203,917

Tableau récapitulatif réalisé à partir des données de Paul Tannery (1902)

Tétracorde moderne (XXème s.)

Tempérament égal	99,61	199,22	199,22
	Mi	Fa	Sol
			La

Philolaos (selon Boèce)

Chromatique tonié	101,95	101,95	294,13
Enharmonique	45,12	45,12	407,82

Platon (Timée)

Diatonique syntone	90,22	203,92	203,92
--------------------	-------	--------	--------

Archytas (selon Porphyre)

Diatonique mol	62,97	231,17	203,92
Chromatique tonié	62,97	140,95	294,13
Enharmonique	62,97	48,77	386,32

Aristoxène

Diatonique syntone	99,61	199,22	199,22
Diatonique mol	99,61	149,42	249,03
Chromatique tonié	99,61	99,61	298,84
Chromatique mol	74,71	74,71	348,64
Chromatique mol	66,41	66,41	365,24
Enharmonique	49,81	49,81	398,44

Eratosthène

Chromatique mol	88,80	93,62	315,63
Enharmonique	43,72	45,08	409,25

Didyme

Diatonique syntone	111,73	182,40	203,92
Chromatique mol	111,73	70,68	315,63
Enharmonique	54,97	56,77	386,32

Ptolémée

Diatonique syntone	111,73	203,92	182,40
Diatonique mol	84,47	182,40	231,18
Diatonique homale	150,63	165,02	182,40
Chromatique syntone	80,55	150,63	266,87
Chromatique mol	62,97	119,45	315,63
Enharmonique	38,05	73,68	386,32

Aristide Quintilien

Chromatique tonié	98,97	104,95	294,13
-------------------	-------	--------	--------

Boèce

Chromatique tonié	90,23	110,30	297,52
Enharmonique	44,53	45,70	407,82

Nomenclature des rapports des intervalles musicaux

François Baskevitch

Novembre 2011 - Août 2012

Nom de la note	Rapport (la note grave de l'intervalle est le 'do')	Valeur du rapport	Valeur en cents	Nom de l'intervalle (le signe + est à comprendre comme un produit de rapports)
do ♮	1 / 1	1,000	0,000	unisson
	32805 / 32768	1,001	1,954	rapport des deux commas : schisma
	$\frac{81}{80}$ $= (3^4 / 2^6) / (5 / 4)$	1,013	21,506	comma zarlinien ou syntone ; rapport entre 4 tierces successives et la tierce juste (harmonique 5)
	$2^{1/53}$	1,013	22,642	comma de Holder (octave composée de 53 commas)
	$\frac{531\,441}{524\,288}$ $= 3^{12} / 2^{19} = (3 / 2)^{12} / 2^7$ $= (3 / 2)^{12} / 128$	1,014	23,460	comma pythagoricien (rapport entre 12 quintes et 7 octaves successives)
do +	46 / 45	1,022	38,051	quart de ton diminué grave du pycnon de l'enharmonique de Ptolémée
do +	$\frac{128}{125}$ $= (16/15) \times (24/25)$ $= 2 / (5/4)^3$ $= (8 / 5)^3 / 4$	1,024	41,059	comma enharmonique = rapport (différence) entre le demi-ton diatonique (16/15) et demi-ton chromatique (25/24) = rapport (différence) entre l'octave et 3 tierces majeures justes = 3 sixtes mineures justes successives
do +	40 / 39	1,026	43,831	quart de ton diminué grave du pycnon de l'enharmonique d'Eratosthène
do +	512 / 499	1,026	44,525	quart de ton diminué grave du pycnon de l'enharmonique de Boèce
do +	39 / 38	1,026	44,970	quart de ton diminué aigu du pycnon de l'enharmonique d'Eratosthène
do +	499 / 486	1,027	45,700	quart de ton diminué aigu du pycnon de l'enharmonique de Boèce

Nom de la note	Rapport (la note grave de l'intervalle est le 'do')	Valeur du rapport	Valeur en cents	Nom de l'intervalle (le signe + est à comprendre comme un produit de rapports)
do +	36 / 35	1,029	48,770	quart de ton diminué aigu du pycnon de l'enharmonique d'Archytas
	$2^{1/24}$	1,029	50,000	quart de ton du tempérament égal ; enharmonique d'Aristoxène
ré bb	32 / 31	1,032	54,964	quart de ton augmenté grave du pycnon de l'enharmonique de Didyme
ré bb	31 / 30	1,033	56,767	quart de ton augmenté aigu du pycnon de l'enharmonique de Didyme
ré bb	28 / 27	1,037	62,961	tiers de ton d'Archytas
ré bb	$2^{1/18}$	1,039	66,667	tiers de ton du chromatique mol d'Aristoxène
ré bb	25 / 24	1,042	70,672	demi-ton chromatique zarlinien ; introduit par Didyme
ré bb	24 / 23	1,043	73,681	3 / 8 de ton aigu du pycnon de l'enharmonique de Ptolémée
ré bb	$2^{1/16}$	1,044	75,000	3 / 8 de ton du chromatique hémiole d'Aristoxène
ré bb	22 / 21	1,048	80,537	2 / 5 de ton du pycnon grave du chromatique syntone de Ptolémée
ré bb	21 / 20	1,050	84,467	demi-ton grave du pycnon du diatonique mol de Ptolémée
ré b	20 / 19	1,053	88,801	demi-ton grave du pycnon chromatique d'Eratosthène
ré b	$\frac{256}{243}$ $= (4/3)^5 / 4$ $= 2^8 / 3^5$	1,053	90,225	limma pythagoricien ; seconde mineure ; demi-ton (diesis) de Platon (Timée)
	$\frac{135}{128}$ $= (9/8) / (16/15)$	1,055	92,179	rapport calculé des oxypycnes d'Archytas (enharmonique et chromatique) ; 1 ton majeur (9/8) – 1 demi-ton diatonique (16/15) (trouvé dans le luth de Mersenne)
ré b	19 / 18	1,056	93,603	demi-ton aigu du pycnon chromatique d'Eratosthène

Nom de la note	Rapport (la note grave de l'intervalle est le 'do')	Valeur du rapport	Valeur en cents	Nom de l'intervalle (le signe + est à comprendre comme un produit de rapports)
ré ♭	18 / 17	1,059	98,955	demi-ton grave du pycnon chromatique de Quintilien ; demi-ton du tempérament égal de Vincenzo Galilei
ré ♭	$2^{1/12}$	1,059	100,000	demi-ton du tempérament égal et du diatonique d'Aristoxène
ré ♭	17 / 16	1,063	104,955	demi-ton aigu du pycnon chromatique de Quintilien
do #	81 / 76	1,066	110,307	demi-ton du chromatique de Boèce
do #	16 / 15	1,067	111,731	demi-ton diatonique zarlinien ; introduit par Didyme et Ptolémée
do #	$\frac{2\ 187}{2\ 048} = 3^7 / 2^{11} = (3/2)^7 / 16$	1,068	113,685	apotome pythagoricien ; demi-ton construit par 7 quintes successives
do #	15 / 14	1,071	119,443	3 / 5 de ton du chromatique mol de Ptolémée
	27/25	1.080	133,238	intervalle zarlinien compris entre la sixte majeur et la septième mineure
do ##	243 / 224	1,085	140,949	7 / 10 de ton du chromatique d'Archytas
do ##	$2^{1/8}$	1,091	150,000	3 / 4 de ton d'Aristoxène
do ##	12 / 11	1,091	150,637	3 / 4 de ton de Ptolémée
do ##	11 / 10	1,100	165,004	5 / 6 de ton de Ptolémée
ré -	$\frac{65\ 536}{59\ 049} = 2^{16} / 3^{10} = (2/3)^{10} \times 64$	1,110	180,450	dilimma ; seconde neutre ; tierce diminuée
ré ♮-	10 / 9	1,111	182,404	ton mineur zarlinien = 1/2 ton chromatique (25/24) + 1/2 ton diatonique (16/15) ; = ton majeur (9/8) - 1 comma zarlin. introduit par Didyme et Ptolémée
ré ♮	$2^{1/6}$	1,122	200,000	ton du tempérament égal
ré ♮	$\frac{9}{8} = (3/2)^2 / 2$	1,125	203,910	ton physique, majeur zarlinien et pythagoricien ; 2 quintes justes successives (= apotome + limma)
ré +	$\frac{4\ 782\ 969}{4\ 194\ 304} = 3^{14} / 2^{22} = (3/2)^{14} / 2^8$	1,140	227,370	ton majeur + comma pyth. = seconde majeure + comma
ré +	8 / 7	1,143	231,174	ton maxime du diatonique mol d'Archytas et de Ptolémée

Nom de la note	Rapport (la note grave de l'intervalle est le 'do')	Valeur du rapport	Valeur en cents	Nom de l'intervalle (le signe + est à comprendre comme un produit de rapports)
mi $\flat\flat$	$2^{5/24}$	1,155	250,000	ton et quart d'Aristoxène
mi $\flat\flat$	$7/6$	1,167	266,871	$4/3$ de ton du chromatique syntone de Ptolémée
mi $\flat\flat$	$75/64$	1,172	274,582	seconde augmentée zarlinienne = ton majeur ($9/8$) + demi-ton chromatique ($25/24$)
mi $\flat$	$\frac{32}{27} = (4/3)^3 / 2$	1,185	294,135	tierce mineure pythagoricienne ; ton et demi du chromatique d'Archytas ; tierce min. ré-fa du zarlinien en ut
mi $\flat$	$19/16$	1,188	297,513	ton et demi du chromatique de Boèce
mi $\flat$	$2^{1/4}$	1,189	300,000	tierce mineure du tempérament égal ; ton et demi d'Aristoxène
ré #	$6/5$	1,200	315,641	tierce mineure juste physique et zarlinienne
ré #	$\frac{19\,683}{16\,384} = 3^9 / 2^{14} = (3/2)^9 / 32$	1,201	317,595	seconde augmentée pythagoricienne
ré ##	$2^{7/24}$	1,224	350,000	ton + $3/4$ de ton du chromatique hémiole d'Aristoxène
ré ##	$2^{11/36}$	1,236	366,667	ton + $5/6$ de ton du chromatique mol d'Aristoxène
mi -	$\frac{8\,182}{6\,561} = (4/3)^8 / 8$	1,249	382,245	tierce neutre ; quarte diminuée pythagoricienne
mi $\natural$	$5/4$	1,250	386,314	tierce majeure juste physique, zarlinienne et mésotonique (mais pas pythagoricienne) = 1 ton maj. ($9/8$) + 1 ton min. ($10/9$)
mi $\natural$	$(18/17)^4$	1,257	395,818	tierce majeure du tempérament égal de Vincenzo Galilei
mi $\natural$	$2^{1/3}$	1,260	400,000	tierce majeure du tempérament égal
mi $\natural$	$\frac{81}{64} = (3/2)^4 / 4 = (9/8)^2$	1,266	407,820	tierce majeure pythagoricienne ; diton = 2 tons majeurs ($9/8$)
mi +	$19/15$	1,267	409,244	diton enharmonique d'Eratosthène

Nom de la note	Rapport (la note grave de l'intervalle est le 'do')	Valeur du rapport	Valeur en cents	Nom de l'intervalle (le signe + est à comprendre comme un produit de rapports)
fa $\flat$	$32 / 25$	1,280	427,373	quarte diminuée zarlinienne = tierce majeure juste (5/4) + comma enharmonique (128/125) = tierce min. juste + demi-ton diaton.
fa $\flat$	$43\,046\,721 / 33\,554\,432$ $= 3^{16} / 2^{25} = (3/2)^{16} / 2^9$	1,283	431,280	tierce majeure pythagoricienne + comma
mi $\sharp$	$125 / 96$	1,302	456,986	tierce augmentée zarlinienne = tierce maj. juste + demi-ton chromatique
fa -	$2\,097\,152 / 1\,594\,323$ $= (4 / 3)^{13} / 32$ $= 2^{21} / 3^{13}$	1,315	474,585	quarte neutre pythagoricienne
fa $\natural$	$4 / 3$	1,333	498,045	quarte juste physique, zarlinienne et pythagoricienne = tierce juste zarlinienne (5/4) + demi-ton diatonique (16/15) = tierce pythagoricienne + limma (256/243) = renversement de la quinte juste
fa $\natural$	$2^{5/12}$	1,335	500,000	quarte du tempérament égal
	$27/20$ $= (9/8) \times (9/8) \times (16/15)$	1,35	519,551	quarte augmentée zarlinienne = tierce mineure + ton majeur = quarte + 1 comma zarlinien
fa +	$177\,147 / 131\,072$ $= (3 / 2)^{11} / 64$ $= 3^{11} / 2^{17}$	1,352	521,505	quarte augm. pythagoricienne = quarte juste + comma
	$25/18$ $= (4/3) \times (25/24)$	1,389	568,717	quarte augmentée zarlinienne = quarte juste + 1 demi-ton chromatique 25/24
sol $\flat$	$1024 / 729$ $= (4 / 3)^6 / 4 = 2^{10} / 3^6$	1,405	588,270	quinte diminuée pythagoricienne ; triton
sol $\flat$	$45 / 32$	1,406	590,224	quarte augmentée zarlinienne ; triton
fa $\sharp$	$2^{1/2} = \sqrt{2}$	1,414	600,000	triton du tempérament égal
fa $\sharp$	$64 / 45$ $= (4/3) \times (16/15)$	1,422	609,776	quarte + 1 demi-ton diatonique 16/15 - quinte diminuée zarlinienne ; triton
fa $\sharp$	$729 / 512$ $= (3 / 2)^6 / 8 = (9 / 8)^3$ $= 3^6 / 2^9$	1,424	611,730	quarte augm. pythagoricienne ; triton pythagorien

Nom de la note	Rapport (la note grave de l'intervalle est le 'do')	Valeur du rapport	Valeur en cents	Nom de l'intervalle (le signe + est à comprendre comme un produit de rapports)
fa #	$\frac{36}{25}$ $= (6/5)^2$	1,440	631,283	quarte augmentée zarlinienne ; triton = 2 tierces mineures
sol -	$\frac{262\ 144}{177\ 147}$ $= (4/3)^{11} / 16$	1,480	678,495	quinte diminuée pythagoricienne ; quinte neutre
	$\frac{3}{2} \times (1/\text{comma p})$ $= 2^{18} / 3^{11}$	1,480	678,495	quinte du loup pythagoricienne (sol# - ré#)
sol ♭ -	$\frac{40}{27}$	1,481	680,449	quinte du loup zarlinienne ; quinte diminuée en usage au XVIIème (quinte ré-la du zarlinien en ut)= quinte juste - 1 comma z
sol ♭	$(18/17)^7$	1,492	692,697	quinte du tempérament égal de Vincenzo Galilei
sol ♭	$(3/2) \times (80/81)^{1/4}$ $= 5^{1/4}$	1,495	696,175	quinte du mésotonique à tierces justes (- 1/4 de comma)
sol ♭	$2^{7/12}$	1,498	700,000	quinte du tempérament égal
sol ♭	$\frac{3}{2}$	1,500	701,955	quinte juste physique, zarlinienne et pythagoricienne = tierce maj. juste zarlinienne (5/4) + tierce min. (6/5) = 3 tons pythagoriciens + limma = renversement de la quarte juste
sol +	$\frac{1\ 594\ 323}{1\ 048\ 576}$ $= 3^{13} / 2^{20} = (3/2)^{13} / 128$	1,520	725,415	quinte juste + comma pyth.
	$(3/2) \times (80/81)^{11/4}$ $= 2^7 / 5^{11/4}$	1,531	737,637	quinte du loup (sol# - ré#) du mésotonique à tierces justes (- 1/4 de comma)
	$\frac{192}{125}$	1,536	743,014	quinte du loup en usage au XVIIème
sol +	$\frac{25}{16}$	1,563	772,627	quinte augmentée zarlinienne = 2 tierces majeures justes = quinte juste + demi-ton chrom.
la ♭ -	$\frac{128}{81}$ $(4/3)^4 / 2$	1,580	792,180	sixte mineure pythagoricienne
	$(3/2)^4 / 4 \times (5/4)$ $= 81/64 \times 80/64$	1,582	794,100	tierce pyth. + tierce juste (intervalle trouvé dans le luth de Mersenne) ; compromis pyth. - zarl.
la ♭	$2^{2/3}$	1,587	800,000	sixte mineure du tempérament égal

Nom de la note	Rapport (la note grave de l'intervalle est le 'do')	Valeur du rapport	Valeur en cents	Nom de l'intervalle (le signe + est à comprendre comme un produit de rapports)
sol #	$8 / 5$	1,600	813,686	sixte mineure juste physique (quarte + tierce min. justes) et zarlinienne
sol #	$6\,561 / 4\,096 = (3 / 2)^8 / 16$	1,602	815,640	quinte augmentée pythagoricienne (2 tierces pyth.)
la -	$32\,768 / 19\,683 = (4 / 3)^9 / 8$	1,665	882,405	septième diminuée pythagoricienne; sixte neutre
la ♮	$5 / 3$	1,667	884,359	sixte majeure juste physique (quarte + tierce justes) et zarlinienne
la ♮	$2^{3/4}$	1,682	900,000	sixte majeure du tempérament égal
la ♮	$27 / 16 = (3 / 2)^3 / 2$	1,688	905,865	sixte majeure pythagoricienne (quarte + tierce) = 3 quintes success.
la +	$14\,348\,907 / 8\,388\,608$	1,711	929,325	sixte majeure pythagoricienne + comma
la +	$216 / 125 = (6 / 5)^3$	1,728	946,924	sixte mineure augmentée zarlinienne = 3 tierces mineures
si bb	$7 / 4$	1,750	968,826	septième physiquement juste (harmonique 7)
si bb	$8\,388\,608 / 4\,782\,969$	1,754	972,630	septième mineure pythagoricienne moins un comma
la ++	$225 / 128$	1,758	976,537	sixte augmentée = 2 septièmes majeures justes (15/8)
si b	$16 / 9 = (4 / 3)^2 / 2$	1,778	996,090	septième mineure pythagoricienne
si b	$(5 / 3) \times (16 / 15) = 16/9 = 2 / (9/8)$	1,778	996,090	septième mineure ps-zarlinienne = sixte juste + demi-ton diatonique = un ton majeur sous l'octave
si b la #	$2^{5/6}$	1,782	1000,000	septième mineure du tempérament égal
la #	$9 / 5$	1,800	1017,596	septième mineure juste physique et zarlinienne (tierce mineure + quinte justes)
la #	$59\,049 / 32\,768 = (3 / 2)^{10} / 32$	1,802	1019,550	sixte augmentée pythagoricienne
si ♮	$4\,096 / 2187 = (4 / 3)^7 / 4$	1,873	1086,315	octave diminuée pythagoricienne ; septième neutre

Nom de la note	Rapport (la note grave de l'intervalle est le 'do')	Valeur du rapport	Valeur en cents	Nom de l'intervalle (le signe + est à comprendre comme un produit de rapports)
si $\flat$	15 / 8	1,875	1088,269	septième majeure juste physique et zarlinienne = quinte juste + tierce juste
si $\flat$	$2^{11/12}$	1,888	1100,000	septième majeure du tempérament égal
si $\flat$	$\frac{243}{128}$ $= (3/2)^5 / 4$	1,898	1109,775	septième majeure pythagoricienne = quinte + tierce = 5 quintes successives
do $\flat$	48 / 25	1,920	1129,328	octave diminuée zarlinienne = sixte majeure juste (8/5) + tierce mineure (6/5)
si $\sharp$	125 / 64	1,953	1158,941	septième augmentée zarlinienne = 3 tierces majeures justes success.
do -	$\frac{1\,048\,576}{531\,441}$ $= (4/3)^{12} / 16$	1,973	1176,540	neuvième diminuée pythagoricienne = 12 quarts successives
do $\flat$	$(18/17)^{12}$	1,986	1187,839	octave du tempérament égal de Vincenzo Galilei
do $\flat$	2	2,000	1200,000	octave juste physique, zarlinienne et pythagoricienne = quinte juste + quarte juste = 12 quarts successives + comma pythagoricien = 2 tierces maj. justes zarliniennes + 1 tierce min. + 1 demi-ton chromatique = 3 tierces maj. justes zarliniennes + 1 comma enharmonique (128/125)

Bibliographie

Sources primaires et commentaires

Archytas de Tarente (IV^{ème} siècle av. J.-C.)

in Porphyre, *Commentaires sur les Harmoniques de Ptolémée* (III^{ème} siècle ap. J.-C.)

BLASS, Friedrich, « *De Archytae Tarentini fragmentis mathematicis* », texte grec, in *Mélanges Graux*, Thorin, Paris, 1884, p. 573-584.

CHAIGNET, Anthelme-Édouard, *Pythagore et la philosophie pythagoricienne. Contenant les fragments traduits de Philolaos et d'Archytas*. Paris, Didier, 1874.

DIELS, Hermann, « *Archytas, Fragmente 35 B1* », texte grec in *Die Fragmente der Vorsokratiker*, Berlin, 1906, t 1, p. 257-261.

DUMONT, Jean-Paul, traduction de l'édition de Diels, *Die Fragmente der Vorsokratiker : Les présocratiques*, Gallimard-Pléiade, 1988. Archytas : p. 518-539 ; Archytas in Porphyre, *Commentaires sur les Harmoniques de Ptolémée*, d'après ed. Düring : p. 533-535.

HUFFMAN, Carl A., Fragment 1, in *Archytas of Tarentum : Pythagorean, philosopher, and mathematician king*, Cambridge University Press, 2005, p. 103-105.

MULLACH, Friedrich, *Fragmenta philosophorum Graecorum*, Volume 2 ; Firmin Didot, Paris, 1867.

ORELLI, Johann Conrad, *Opuscula graecorum veterum sententiosa et moralia*, Leipzig, 1821, tome II.

WALLIS, John, « *Porphyrii in Harmonica Ptolemaei commentarius* », in *Operum Mathematicorum*, Oxoniae, , 1699. t III, p. 236-238.

Autres auteurs anciens

ARISTOXENE (IV^{ème} siècle av. J.-C.), *Aristoxenou Harmonikôn Sôzomena*, Ed. critique et trad. en allemand Paul Marquard, Weidmann, 1868 ; *Éléments harmoniques*, Trad. de Ch. É. Ruelle, Lalaine, Paris, 1871.

EUCLIDE (ps.), *La division du canon*, 1883, traduction de C.-Ém. Ruelle, in *Revue des Etudes grecques*, t XVII, 1883 ; BARBERA, André, *The Euclidean division of the canon, Greek and Latin sources*, University of Nebraska Press, Lincoln, 1991.

PHILOLAOS (V^{ème} siècle av. J.-C.), *Fragments*, in Nicomaque de Gérase (II^{ème} siècle ap. J.-C.), *Introduction harmonique*

PLATON (IV^{ème} siècle av. J.-C.), *Timée*, traduction É. Chambry, Garnier Flammarion, Paris, 1969.

PLATON, *La République*, traduction et notes de Robert Baccou, Garnier Flammarion, Paris, 1966.

Auteurs grecs tardifs

ATHENEE DE NAUCRATIS, *Deipnosophistes, Banquet des savants, par Athénée*, trad. Lefèbvre de Villebrune, 5 tomes, Lamy, Paris, 1789-1791, livres IV et XIV.

BOECE (Vème siècle ap. J.-C.), Boethius, *De institutione musica*, Ed. G. Fiedlein, Teubner, Leipzig, 1867 ; *Institution de la musique*, traduction et commentaire Christian Meyer, Brepols, Turnhout, 2005.

JAMBLIQUE, *Vie de Pythagore*, Les Belles Lettres, Paris, 1996, trad. L. Brisson.

MEIBOM, *Antiquae musicae auctores septem*, Amsterdam, Elzevir, 1652 ; éd. critique de JAN, Karl von, *Musici scriptores graeci*, Teubner, Leipzig, 1895 ; RUELLE, Charles-Émile, sept textes d'auteurs sur la musique antique (Aristoxène, Ps-Euclide, Nicomaque de Gêrase, Alypius, Gaudentius, Bacchius l'Ancien, Aristide Quintilien, Marius Capella), traduction française avec commentaires, Pottier de Lalaine, Paris, 1887.

LAËRCE, Diogène, *Vies, doctrines et sentences des philosophes illustres*, traduction française sous la direction de Marie-Odile Goulet-Cazé, Le livre de poche, Paris, 1999.

NICOMAUQUE DE GERASE, Ἀριθμητικὴ εἰσαγωγή, *Introduction arithmétique*, texte grec, édition Richard Hoche, Teubner, Leipzig, 1866.

PACHYMERES, Georges, *Quadrivium*, ed. A.J.H. Vincent, in *Notices et extraits des manuscrits*, t XVI-2, p 476 et suiv, 1847.

PORPHYRE, *Vie de Pythagore*, Le Belles lettres, Paris, 1982, trad. E. Des Places.

PS-PLUTARQUE, *De la musique*, texte grec et traduction Weill et Reinach, Leroux, Paris, 1900.

PTOLEMEE, Claude (IIIème siècle ap. J.-C.), *Harmoniques*

QUINTILIEN, Aristide (Ier siècle ap. J.-C.), *Sur la musique*, ed. Jahn (1882) ; traduction et commentaire François Duysinx (Université de Liège), Droz, Genève, 1999.

THEON DE SMYRNE, *Exposition des connaissances mathématiques utiles pour la lecture de Platon*, Trad. du grec au français J. Dupuis, Hachette, Paris, 1892.

Sources secondaires

BAILHACHE, Patrice, *Une histoire de l'acoustique musicale*, Editions du CNRS, Paris, 2001.

BARBERA, André, *The Euclidean division of the canon, Greek and Latin sources*, University of Nebraska Press, Lincoln, 1991.

BARKER, Andrew, *Greek Musical Writings : Harmonic and acoustic theory*, Cambridge University Press, 2004.

BARKER, Andrew, *Scientific method in Ptolemy's Harmonics*, Cambridge University Press, 2000.

BELIS, Annie, « À propos de la construction de la lyre », in *Bulletin de correspondance hellénique*, 1985, 109-1, p. 201-220.

BELIS, Annie, « Cithares, citharistes et citharôdes en Grèce », in *Comptes-rendus des séances de l'Académie des inscriptions et belles-lettres*, Année 1995, Volume 139-4, p. 1025 – 1065.

- BRISSON, Luc, « Platon, Pythagore et les Pythagoriciens » in M. Dixsaut et A. Brancacci, *Platon, source des présocratiques, exploration*, Vrin, Paris, 2002.
- BURKERT, Walter, *Lore and Science in ancient Pythagoreanism*, Harvard University Press, 1972.
- DAREMBERG ET SAGLIO, *Dictionnaire des Antiquités grecques et latines*, Hachette, Paris, 1877.
- DUCHEZ, Marie-Elisabeth, « La représentation spatio-verticale du caractère musical grave-aigu et l'élaboration de la notion de hauteur de son dans la conscience musicale occidentale », in *Acta Musicologica*, Vol. 51, 1979, pp. 54-73.
- DÜRING, Ingemar : « Porphyrios Kommentar zur Harmonielehre des Ptolemaios », in *Göteborgs Högskolas Årsskrift*, vol. 38 n° 2. Göteborg 1932. (Verlag, Hildesheim ; New York , 1978 , Réimpression de l'éd. de Göteborg, 1932)
- DÜRING, Ingemar : « Ptolemaios und Porphyrios über die Musik », in *Göteborgs Högskolas Årsskrift*, vol. 40, n° 1. Göteborg 1934.
- FESTUGIERE, A.-J., « Les mémoires pythagoriques cités par Alexandre Polyhistor », in *Revue des études grecques*, 58, 1945, p. 1-65.
- GEVAERT, F.-A. *Histoire et théorie de la musique dans l'Antiquité*, Annoot Braekman, Gand, t I, 1875, t II , 1881.
- GOTTSCHALK, H.-B., « The De Audibilibus and peripatetic Acoustics », in *Hermes*, 96, p 435-461, 1968.
- HELMHOLTZ, Hermann, *Die Lehre von den Tonempfindungen als physiologische Grundlage für die Theorie der Musik*, Vieweg, Braunschweig 1863. Traduit de l'allemand par M. G. Gueroult : *Théorie physiologique de la musique fondée sur l'étude des sensations auditives*, Masson, Paris, 1868, - réédition J. Gabay, 1990.
- HUFFMAN, Carl A., *Archytas of Tarentum : Pythagorean, philosopher, and mathematician king*, Cambridge University Press, 2005.
- FREYBURGER, Marie-Laure, "Archytas de Tarente : Un mécanicien homme d'État", in *Folia Electronica Classica* ; Louvain-la-Neuve ; Numéro 6 – juillet-décembre 2003.
- LATTARD, Jean, *Gammes et tempéraments musicaux*, Masson, Paris, 1988.
- LEIPP, Émile, *Acoustique et musique*, Masson, Paris, 1980.
- LIENARD, Pierre, *Petite histoire de l'acoustique*, Soc. Franç. D 'Acoustique, Hermès, Paris, 2001.
- LINDSAY, R. Bruce, *Acoustics, Historical and philosophical development*, Dowden Hutchinson Ross, Stroudsburg, Pennsylvania, 1974.
- MARTIN, Th.-Henri, *Etudes sur le Timée de Platon*, Ladrangue, Paris, 1841.
- MATHIEU, Bernard, « Archytas de Tarente : pythagoricien et ami de Platon », in *Bulletin de l'Association Guillaume Budé*, 1987, p.239-255.
- MERSENNE, Marin, *Harmonie Universelle*, Ed. CNRS, Paris, 1636, 1965, édition fac simile en 3 volumes de l'édition de 1636.
- PROUST, Dominique, *L'harmonie des sphères*, Le Seuil, Paris, 2001.
- REINACH, Théodore, « La musique des sphère », in *Revue des études grecques*, 13, Paris, 1900.
- REY, Abel, *Les sciences dans l'Antiquité (5 volumes)*, vol. II, Albin Michel, Paris, 1930.

- RUELLE, Ch.-Émile, « Étude sur Aristoxène et son école » in *Revue d'Archéologie*, t XIV, Paris, 1857.
- TANNERY, Paul, *Pour l'histoire de la science hellène*, Alcan, Paris, 1887, Gauthier-Villars, Paris, 1930.
- TANNERY, Paul, « Sur les intervalles de la musique grecque », in *Revue des Etudes Grecques*, 15, 1902, p.336-352.
- TANNERY, Paul, « La division du canon », in *Revue des Etudes Grecques*, 1883.
- TANNERY, Paul, « Sur l'inauthenticité de la Division du canon attribuée à Euclide », in *Comptes rendus des séances de l'Académie des Inscriptions et Belles-Lettres*, 1904, t. IV, pp. 439-445. Voir également la réponse de Ch. Ém. Ruelle, « Sur l'authenticité probable de la Division du canon », in *Revue des Etudes Grecques*, 1906, t. 19, p. 318-320.
- TATON, René, *La science antique et médiévale*, PUF, Paris, 1957.
- VINCENT, Alexandre-Joseph-Hidulphe, « Notices sur trois manuscrits grecs relatifs à la musique » avec traduction et commentaires in *Notices et extraits des manuscrits de la bibliothèque du roi*, 16-2, Paris, 1845.
- VITRAC, Bernard, « Les classifications des sciences mathématiques en Grèce ancienne », in *Archives de Philosophie* 68 (2005) p. 269-301.
- VITRAC, Bernard, , « Les mathématiques dans le *Timée* de Platon : le point de vue d'un historien des sciences », in *Etudes platoniciennes* 2 (2006) p. 11-78.
- VAN WYMEERSCH, Brigitte, « La tradition arithmétique en musique, l'exemple de Gassendi » in *Sciences et Techniques en Perspective*, 2e série, 8/1 (2004), p. 85- 97.

