

II - Oude Grieken: het wankelend wereldbeeld van de Pythagoreeërs

1. Inleiding

Pythagoras van Samos (ca. 585 v. Chr.) is tegenwoordig vooral bekend van de stelling die naar hem genoemd is, maar was in zijn tijd vooral beroemd als de wijste persoon op aarde en als leider van een omvangrijke sekte bestaande uit zijn volgelingen, de 'Pythagoreeërs', die nog tot ver na Pythagoras' dood bleef bestaan, en waarvan de leden een heel eigen leefwijze en wereldbeeld op na hielden.

Na wat algemeenheden over Pythagoras en zijn volgelingen (en dan met name de wiskunde waar ze zich mee bezighielden) gaan we in op twee gebieden waar het wereldbeeld van de Pythagoreeërs bij nadere beschouwing toch niet helemaal bleek te kloppen: de muziekleer en de verhoudingen in rechthoekige driehoeken. Omdat beide onderdelen waarschijnlijk veel tijd kiezen kun je ook hier kiezen of je na hoofdstuk 2, eerst 3 of 4 maakt.

2. Algemeenheden over de Pythagoreeërs en hun wiskunde.

2.1 Thales van Milethus, Pythagoras' leermeester

Pythagoras leerde de wiskunde naar alle waarschijnlijkheid van Thales van Milethus (640-546), koopman, filosoof, astronoom en de oudst bekende Griekse wiskundige. Thales hield zich waar het wiskunde betrof voornamelijk bezig met meetkunde. Hij reisde veel en deed meetkundige kennis op in o.a. Egypte en Babylonië. Hij wordt verondersteld de eerste te zijn die bij een heleboel algemeen bekende dingen afvroeg waarom ze zo waren.

Iedereen die wel eens iets met meetkunde gedaan had wist dat een gelijkbenige driehoek (een driehoek met twee gelijke zijden) ook twee gelijke hoeken had. Dat wil zeggen, er was nog nooit een gelijkzijdige driehoek gevonden waarvoor dat niet het geval was. Hetzelfde goldt voor het feit dat een willekeurige rechte lijn door het middelpunt van een cirkel deze cirkel in twee precies even grote helften verdeelt.

Thales was de eerste die bedacht dat als dit inderdaad altijd zo is, er dan ook een reden voor moet zijn en door logisch redeneren bewees dat het ook inderdaad waar moet zijn. Dit was een cruciale stap in het denken van mensen over wiskunde en tot vandaag is dit waar het in wiskunde omgaat.

1. Kun je bedenken waarom een gelijkbenige driehoek inderdaad altijd twee gelijke hoeken heeft, of aantonen dat dit altijd zo is?

Een ander bekend verhaal over Thales is dat hij onuitwisbare indruk maakte op de Egyptische priesters die hij bezocht, door in een mum van tijd de hoogte van een van de Egyptische pyramides te berekenen. Hij deed dit door eerst de lengte van de schaduw van de pyramide te meten en vervolgens zijn eigen schaduw. Dit klinkt echter iets simpeler dan het is. Bij zijn eigen schaduw kon hij gewoon een meetlint vanaf zijn voeten tot het andere eind van de schaduw over de grond leggen. Bij de pyramide was dat niet mogelijk.

2. Waarom niet?
3. Wat kon hij wel meten aan de pyramide en diens schaduw?
4. Vallen de zonnestralen altijd in de zelfde richting als de muren van de Pyramide? Levert dit nog extra moeilijkheden op?
5. Hoe berekende hij de lengte schaduw van de pyramide denk je? En de hoogte van de pyramide?

2.2 Pythagoras en de gehele getallen

Pythagoras leerde van Thales ongetwijfeld ook veel over astronomie en meetkunde. Hij kende natuurlijk de stelling van Pythagoras. Deze bestond al veel eerder maar Pythagoras wordt wel als een van de eersten beschouwd die er een bewijs van in het zand tekende en

vervolgens als dank voor deze ontdekking honderd ossen aan de goden offerde. Maar Pythagoras en zijn volgelingen waren vooral geïnteresseerd in getallen. En als we zeggen getallen dan bedoelen we ook getallen. Echte getallen zoals 1, 2, 3 en 153. Geen rare verzinsels zoals e of -1 . Positieve gehele getallen dus, zoals we tegenwoordig zouden zeggen.

Zijn volgelingen bestudeerden niet alleen de bijzondere eigenschappen van sommige getallen, ze geloofden ook dat de hele wereld was opgebouwd uit gehele getallen en verhoudingen daartussen. Overal, in de meetkunde, in de bewegingen van de hemellichamen, in de levenscycli van insecten, in de muziek, en zelfs in het menselijk leven vonden ze hun gehele getallen terug. Ze geloofden dat alles in het heelal bestuurd werd door onveranderlijke wetten, overeenkomstig met de wetten van de rekenkunde. En om deze wetten te ontsluiten diende men zich veel met meetkunde, sterrenkunde en muziek bezighouden, maar ook vooral veel met de studie van gehele getallen en hun eigenschappen.

Bovendien kenden ze aan verschillende getallen allerlei symbolische en mystieke eigenschappen toe. Oneven getallen waren mannelijk, even vrouwelijk. Het getal 5 stond voor het huwelijk, een ander getal weer voor de dood etc.

Ook hadden de Pythagoreeërs de gewoonte getallen in klassen in te delen zoals driehoeks-, vierkants- en vijfhoeks getallen, volkomen getallen en bevriende getallen.

Bijzondere getallen: getallen met een bijzondere vorm

Driehoeksgetallen zijn getallen waarvoor geldt dat als je zoveel kiezelstenen hebt, je deze stenen in een mooi regelmatig driehoekig patroon kunt leggen, zoals 1, 3, 6:

```

*
      *
    * *
      * * *
    * * *
  
```

6. Wat zijn de volgende 3 driehoeksgetallen?

Voor vierkants getallen geldt hetzelfde, maar dan met een vierkant patroon:

```

*   * *   * * *
  *   *   * * *
    *   *   * * *
  
```

7. Wat is het 12e vierkantsgetal?

8. Wat denk je dat het tweede kubusgetal is? En het derde?

9. Overmorgen krijgen jullie meer over de eigenschappen van driehoeks en vierkantsgetallen, dus wij gaan snel verder met wat andere getallen die een belangrijke rol speelden.

Bijzondere getallen: getallen met bijzondere delers.

Als je het als getal echt helemaal wilde maken bij de Pythagoreeërs dan moest je 'volkomen', 'volmaakt' of 'perfect' zijn. Dit zijn alledrie benamingen voor dezelfde soort getallen. Een getal is perfect als de som van zijn "echte" delers (echt betekent hier dat het getal zelf niet mee mag doen) weer gelijk aan het getal zelf is. 66 is duidelijk niet perfect. 66 is deelbaar 1, 2, 3, 6 en 11 en $1 + 2 + 3 + 6 + 11 = 23$. Veel te weinig dus. Dat kunnen we geen perfectie noemen. 6 ($1 + 2 + 3$) daarentegen is wel volkomen, evenals 28 ($1 + 2 + 4 + 7 + 14$). Helaas is volmaaktheid maar dun gezaaid: het volgende volmaakte getal is 496 het daarop volgende 8128 en het vijfde al maar liefst 33.550.336. Het laat zich raden dat bij de Grieken alleen de eerste vier volmaakte getallen bekend waren. Of er ook oneven perfecte getallen bestaan is tot op de dag van vandaag niet bekend. Toch zou ik maar niet op goed geluk gaan zoeken want met behulp van computers weten we wel dat een eventueel oneven volmaakt getal zich niet onder de eerste 10 tot de 50ste getallen schuilt.

Het idee achter bevriendheid van "bevriende" getallen lijkt sterk op dat achter de volkomenheid van de volkomen getallen. Bevrinden getallen zijn in hun eentje misschien niet perfect, ze vullen elkaar wel perfect aan.

Pythagoras zei ooit: "Een vriend is de andere ik, zoals 220 en 284". Kennelijk dacht hij dat vriendschap onder getallen een bekender verschijnsel was dan onder mensen.

10. Waarom zijn deze twee getallen bevriend volgens Pythagoras denk je? (Aanwijzing: de delers van 220 zijn 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, en 110, de delers van 284 mag je indien gewenst zelf uitzoeken.

Bijzondere getallen: 153

Ook een erg leuk getal is 153. Het is een driehoeks getal (ga na), en daarnaast is het ook te schrijven als $1 + (1 \times 2) + (1 \times 2 \times 3) + (1 \times 2 \times 3 \times 4) + (1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5)$ en als klapper op de vuurpijl geldt ook nog dat als je de derde machten van de cijfers bij elkaar optelt het weer 153 oplevert: $1^3 + 5^3 + 3^3 = 1 + 125 + 27 = 153$.

Met deze laatste eigenschap is het nog veel erger gesteld. Het blijkt dat als je van een willekeurig door drie deelbaar getal de derde machten van de cijfers bij elkaar optelt en je dit bij de uitkomst weer doet en dit eindeloos herhaalt, je vroeg of laat bij 153 terecht komt (en daar dus eeuwig blijft hangen)

Voorbeeld: 12 is deelbaar door drie $1^3 + 2^3 = 9$; $9^3 = 6561$; $6^3 + 5^3 + 6^3 + 1^3 = 216 + 125 + 216 + 1 = 558$; $5^3 + 5^3 + 8^3 = 125 + 125 + 512 = 762$; $343 + 216 + 8 = 567$; $125 + 216 + 343 = 684$; $216 + 512 + 64 = 792$; $343 + 729 + 8 = 1080$; $1 + 0 + 512 + 0 = 513$; $125 + 1 + 27 = 153$ hè.

Korter voorbeeld: 27 is deelbaar door 3; $2^3 + 7^3 = 8 + 343 = 351$; $3^3 + 5^3 + 1^3 = 27 + 125 + 1 = 153$

En dan nu een vraag die ons zelf niet gelukt is op te lossen (maak deze vraag dus alleen als je heel veel tijd en zin over hebt!)

11. Het is natuurlijk heel leuk dat dit voor de getallen die we gezien hebben (12, 6561, 558, etc) klopt, maar hoe kun je nou zeker weten dat dit voor alle door 3 deelbare getallen geldt, of is dit eigenlijk wel zo?

Het is niet zeker of deze laatste eigenschap al in de tijd van Pythagoras bekend was, maar in elk geval speelde het getal 153 dankzij zijn eerste drie eigenschappen een belangrijke rol in allerlei getallenmystiek, ook in ander tijden en plaatsen zoals bij voorbeeld de bijbel.

3. Pythagoras en de Muziekleer.

Een melodie wordt voornamelijk gevormd door twee zaken: het ritme en de gebruikte toonhoogtes. Hoewel het ritme op het eerste gezicht misschien veel meer met wiskunde te maken lijkt te hebben, gaan we ons hier alleen maar met de toonhoogten bezighouden. De wiskunde die daarachter zit werd namelijk ontdekt door onze goede vriend Pythagoras van Samos.

Hoewel het wel handiger is als je noten kunt lezen, hoeft je hiervoor niet heel veel van muziek te weten; alles wat je nodig hebt wordt in principe in de tekst verteld. Wat je wel moet kunnen, is, wanneer jij of iemand anders twee noten zingt, zeggen welke van de twee de hoogste is en welke de laagste (en als ze even hoog zijn moet je dat natuurlijk ook kunnen).

Inleiding

Zing de eerste regel van "Zie ginds komt de stoomboot".

12. Kun je weten of de toon waarop je begint een "a" is of een "g"?
13. Kun je weten of de toon waarop je eindigt hoger of lager is dan de toon waarop je begon?

Begin nu eens op de toon waarop je net eindigde.

14. Waarom klinkt het liedje niet echt anders?

Zoals je ziet is het als je een lied speelt of zingt niet echt belangrijk wélke noten je speelt, als de verschillen in toonhoogte tussen de noten die je gebruikt maar kloppen (als je met iemand samenzingt, is dat natuurlijk een ander verhaal). Welk verschil in toonhoogte waar opduikt, bepaalt welk lied je zingt. Als je na de eerste noot omlaag was gegaan met je stem in plaats van omhoog, had het lied nooit op “Zie ginds komt de stoomboot” geleken.

Gek genoeg worden in alle vrijwel alle liedjes en muziekstukken ter wereld maar een beperkt aantal verschillen in toonhoogte (ook wel *intervallen* genoemd) gebruikt. Op een piano is dit mooi te zien. Je kan alleen maar noten spelen waar een toets voor is. Denkbeeldige toonhoogten die tussen die van een naast elkaar gelegen witte en zwarte toets liggen, kun je als je je best doet misschien wel zingen, maar niet spelen. En op instrumenten waarop dat wel kan, zoals de viool, worden spelers juist geleerd dat vooral niet te doen omdat de muziek anders uitgesproken “vals” klinkt.

Iedereen is er van kleins af aan gewend is geraakt dat de toonhoogtes van noten in een willekeurig stuk muziek zich altijd op dezelfde manier tot elkaar verhouden. Je bent zo gewend aan de gebruikelijke toonhoogteverschillen, dat je, wanneer je een liedje zingt, er totaal niet meer bij nadenkt. Daarom is het ook duizend keer moeilijker om in je eentje vals te zingen dan met zijn tweeën. (Lelijk zingen daarentegen, is weer een fluitje van een cent.)

Maar had de keuze voor juist deze verhoudingen tussen tonen ook heel anders kunnen zijn, als dat toevallig ooit zo was ontstaan? Het lijkt erop van niet. Over de hele wereld wordt al eeuwenlang min of meer hetzelfde toonsysteem gebruikt, op een paar kleine verschillen na (waar deze verschillen vandaan komen zal in dit programma blijken). En nu we weten dat geluid een trilling is en we het bestaan van boventonen kennen, is het ook vrij makkelijk te begrijpen waarom de mens nou juist voorkeur heeft voor deze toonsafstanden.

Bij de oude Grieken was over geluidstrillingen echter nog niets bekend, en Pythagoras wordt beschouwd als de eerste die ontdekte dat er een verband bestond tussen “zuivere” samenklanken en – hoe kan het ook anders – gehele getallen.

Monochorden, misbaksels en muziek.

Pythagoras deed zijn onderzoek naar toonhoogten met behulp van een “Monochord”. Dat is een snaarinstrument met maar een snaar. Pythagoras’ monochorden zagen er vast veel mooier uit dan de gedachten die ik in elkaar heb geknutseld, maar het idee blijft het zelfde. Het is trouwens handig om de monochorden op een doos of een ander hol voorwerp te zetten, om het geluids iets te versterken. Je kan de plank natuurlijk ook tegen je oor houden.

15. Pythagoras ontdekte (net als miljoenen muzikanten voor en na hem), dat de toonhoogte afhangt van drie kenmerken van de snaar. Kun je bedenken welke dat zijn? (Bij de monochorden die ik geknutseld heb kun je er maar twee veranderen)

Het octaaf en andere intervallen.

Zoals gezegd heet een verschil in toonhoogte tussen twee tonen een *interval*. Verreweg het bekendste en zuiverste interval is het octaaf, dat al eeuwen lang overal ter wereld gebruikt wordt. Als twee tonen ‘hetzelfde’ klinken, maar het niet zijn, schelen ze een octaaf. Het verschil tussen de eerste en de laatste toon van een toonladder is een octaaf (daarom hebben ze ook dezelfde naam, bij voorbeeld “do”, of “g”, of “as”). Als een mannen- en een vrouwenstem dezelfde toon zingen is het verschil tussen de twee tonen normaal gesproken ook een octaaf.

16. Kun je twee tonen achter elkaar zingen, die onderling een octaaf schelen? Als het niet meteen lukt kan het helpen eerst (hardop of in je hoofd) de andere tonen van de toonladder te zingen. Kun je ook een octaaf zingen, als je op een andere toon begint?

Pythagoras ontdekte dat het octaaf samenhangt met een prachtige getalsverhouding in de lengte van de snaar, namelijk 1 staat tot 2. Als je twee snaren hebt waarvan de een twee keer

zolang is als de ander, klinkt de korte, wanneer je hem aantokkelt, precies een octaaf hoger dan de ander. (En de lange dus precies een octaaf lager)

17. Ga met behulp van het monochord na of dit klopt. Je kan de snaar 'inkorten' door hem op de gewenste afstand tegen het hout te drukken.

NB1: Het kan helpen de toon die je hoort na te zingen. Je hebt dan vaak een beter idee van de toonhoogte en je stem sterft minder snel uit.

NB2: De geleerden zijn het er niet helemaal over eens of Pythagoras de snaar op de helft afkneep en het geluid van de halve met dat van de hele snaar vergeleek, of dat hij de snaar op een-derde afklemde en het linker deel vergeleek met het rechter. Je moet zelf maar zien wat het mooiste resultaat geeft.

Tegenwoordig weet men zoveel...

Je begrijpt dat Pythagoras erg onder de indruk was zijn ontdekking. Het octaaf, het mooiste en simpelste interval uit de muziek, blijkt onlosmakelijk verbonden te zijn met de mooiste en simpelste verhouding uit de getallenleer: 1 staat tot 2. Hij vroeg zich af of andere mooie zuivere intervallen ook tot mooie getalsverhoudingen zouden leiden.

18. Hoeveel korter moet je een snaar maken om de toon die eruit komt twee octaven hoger te maken dan de oorspronkelijke toon? (Met "twee octaven hoger" wordt bedoeld dat de hoge toon precies een octaaf hoger is dan de toon die een octaaf hoger is dan de lage toon (glp). De afstand tussen de laagste en de hoogste c op een doorsnee piano is bijvoorbeeld zeven octaven).
19. Welke getalsverhouding hoort er dus bij het interval "twee octaven"? En bij "drie octaven"?

Tegenwoordig weten we waar deze getalsverhoudingen vandaan komen. Geluid wordt beschouwd als een trilling van de lucht, en het aantal trillingen per seconde (Herz) bepaalt de toonhoogte. Hoe meer trillingen per seconde, hoe hoger de toon. Als een bepaalde a op een instrument een trilling van 440 Herz veroorzaakt, dan geeft de a een octaaf hoger een trilling van 880 herz, en de a een octaaf lager een trilling van 220 Herz. Alle tonen in de toonladder tussen de oorspronkelijke en de hoge a hebben dus een frequentie (aantal trillingen per seconde) die "ergens" tussen de 440 en 880 ligt. Het "wonder" is, dat ongeacht welke frequentie een toon ook heeft, de toon die een octaaf hoger klinkt, een precies twee keer zo hoge frequentie heeft.

20. Waar zit het verband tussen de frequenties en de snaarlengte-verhoudingen van Pythagoras? Controleer of de berekende snaarlengte-verhouding voor twee octaven klopt.
21. Als de verhouding tussen de frequenties, of de snaarlengtes die horen bij twee noten "8 staat tot 4" is, welk interval ligt er dan tussen deze twee noten?
22. Zegt het verhoudingsgetal iets ook iets over de toonhoogte van de gebruikte tonen?

Pythagoras kende het bestaan van "frequenties" natuurlijk niet, maar het wonder trof hem destee meer. Hij wist alleen dat mooie getalsverhoudingen zoals 1:2 in een mysterieus verband stonden met mooie intervallen zoals het octaaf. Welke getalsverhoudingen gaan er achter andere intervallen schuil, of liever, welke intervallen horen bij andere getalsverhoudingen, vroeg hij zich af en hier zullen we dat voor een deel bekijken. Voor wie noten kan lezen, staan er van de gebruikte intervallen noten voorbeelden op het spiekblad achterin.

De kwinten kwestie

Na het octaaf is de kwint het meest zuivere interval. Zuiver is hier natuurlijk een beetje onhandig woord; je zou kunnen zeggen: 'Ja, nogal logisch dat-ie zuiver is. Als je hem niet zuiver zingt, is het geen echte kwint meer, en dat geldt verder voor alle intervallen.' Maar met het zuiverst bedoel ik dat de tonen van een kwint (na die van een octaaf) het meest "op elkaar lijken".

De afstand tussen 'Altijd' en 'is Kort' in "Altijd is Kortjakje ziek", is een kwint. Net als het verschil tussen de hoogste en de laagste toon in "Boer daar ligt een kip in 't water". Iedereen die wel eens iemand een viool heeft horen stemmen, weet hoe een kwint klinkt als de tonen tegelijk gespeeld worden.

Omdat de tonen van een kwint zo goed bij elkaar lijken te passen, dacht Pythagoras dat daar ook wel een erg mooie verhouding bij moest horen.

23. Liggen de tonen van een kwint verder van elkaar of juist dicht bij elkaar, dan die van een octaaf? (Als je vanaf de zelfde grondtoon een toon zingt die een kwint hoger is, en een die een octaaf hoger is, welke van deze twee tonen is dan het hoogst?)

Een verhouding kun je opvatten als een breuk of deling.

24. Wat betekent het als de uitkomst van de deling behorend bij een interval dicht bij 1 ligt dan die bij een ander interval? Maakt het hierbij uit of je "hoog" door "laag" deelt of andersom?
25. Denk nog even aan de a van 440 Herz. De noot die een kwint hoger ligt (een e) heeft natuurlijk een andere frequentie. Boven/Onder/Tussen welke frequenties moet deze frequentie dan liggen, gezien het antwoord op vraag 23? En de noot (een d) die een kwint lager ligt dan de a van 440 Herz, boven/onder/tussen welke frequenties ligt zijn frequentie?
26. Welke getalsverhoudingen kunnen dus in elk geval níet bij de kwint horen?
27. Wat is de mooiste verhouding (dwz waarvan de verhoudingsgetallen het dichtst bij 0 liggen) die dan nog overblijft? Ga met het monochord na of deze verhouding inderdaad een kwint oplevert.

Bim-bam-bom

Het is nooit wetenschappelijk aangetoond dat het lied 'Zie ginds komt de stoomboot' al bij de oude Grieken bekend was, maar het interval tussen de eerste twee tonen kenden ze in elk geval wel. Dit interval is de kwart en vormt het begin van heel veel Sinterklaas-, Kerst- en kinderliedjes. Van een liedje vormt het ook het einde: Bim-bam-bom in Vader Jacob bestaat uit twee kwarten: een omlaag en een omhoog.

De kwart klinkt net zo zuiver als de kwint. Eigenlijk lijken de intervallen als de twee tonen tegelijk gespeeld worden erg op elkaar. Dit is niet zo'n wonder: als je vanaf een toon eerst een kwint omhoog gaat en dan een kwart, of eerst een kwart en dan een kwint, dan schelen de eerste en de laatste toon precies een octaaf.

28. Bereken de getalsverhouding die hoort bij de kwart. (Als je het antwoord op vraag 27 niet had, of er niet zo zeker van bent: de verhouding die hoort bij een kwint is $2 : 3$) (Het kan handig zijn om uit te gaan van een "proefnoot" met een willekeurige frequentie (bv 440 Herz) en vervolgens de frequenties van de noten die een kwint en een octaaf hoger liggen uit te rekenen. Waarom is de getalsverhouding van de kwart mooi uit deze twee frequenties af te leiden?)
29. Hoe komt het dat de afstand tussen een "a" en een "e" soms een kwint is en soms een kwart?

Tijd voor wat notatie.

Het blijkt dat bij alle intervallen in een toonladder mooie getalsverhoudingen horen. Ook hebben ze allemaal namen. Om het praten wat makkelijker te maken zullen we ons eerst daar kort mee bezig houden. Intervallen die groter zijn dan een octaaf hebben meestal geen eigen naam. Omdat twee tonen die een octaaf uit elkaar liggen zo veel op elkaar lijken, spreekt men bij over intervallen die groter dan een octaaf zijn met bijvoorbeeld 'een octaaf

plus een kwint', wat betekent dat je eerst een octaaf omhoog of omlaag gaat en vanaf daar nog eens een kwint.

30. Bereken de getalsverhoudingen die horen bij "een octaaf plus een kwart" en "twee octaven plus een kwint". (Bedenk dat je de verhoudingen zult moeten "vertalen" om ze goed op elkaar aan te laten sluiten. Gelukkig is $1:2 = 2:4 = 3:6$ etc)

Hieronder staat een overzicht van de meest voorkomende intervallen binnen een octaaf. De voorbeelden zijn ook te bewonderen op het spieksblad. De getallen onder "afstand" zijn niet de getalsverhoudingen die Pythagoras berekende, maar het aantal stapjes dat je op de notenbalk moet zetten als je over de "sporten" van de toonladder van de ene noot van het interval naar de andere klimt of daalt. Het benoemen van intervallen is gewoon een duur woord voor tellen. Het enige waar je op moet letten is dat je zowel de eerste als de laatste noot meeneemt. De intervallen in deze toonladder zijn:

Naam:	Afstand:	Voorbeelden:	Verhouding:
Priem (twee keer de zelfde noot)	1	C-C, G-G, A-A etc	1:1
Secunde	2	C-D, G-A, en nog een paar	...
Kleine Terts	3	D-F, E-G, A-C (de volgende C dus)	...
Grote Terts	3	C-E, G-B	...
Kwart	4	C-F, D-G, E-A etc	3:4
Kwint	5	C-G, D-A etc	2:3
Kleine Sext	6	E-C, A-F	...
Grote Sext	6	D-B, F-D	...
Septiem	7	C-B	...
Octaaf	8	C-C, D-D etc	1:2

De stippeltjes kun je als je verder gaat zelf invullen.

31. Kun je aan de toonladders op het spieksblad zien welke intervallen er naast de kwint en de kwart samen 'optellen' tot een octaaf?

Het is onrechtvaardig verdeeld in de wereld.

Het valt op dat in het lijstje twee soorten tertsen en sexten vermeld staan. Dit komt omdat de afstanden tussen twee opeenvolgende tonen in de toonladder niet overal gelijk zijn. De afstand tussen de e en de f en die tussen de b en de c is kleiner dan de afstand tussen bijvoorbeeld een a en een b of een f en een g. Op de piano kun je dat zien doordat er tussen de e en de f en tussen de b en de c geen zwarte toets zit. Omdat we in onze toonladders graag op deze twee plekken een kortere afstand hebben, zijn de notenbalk en de wit-zwartverdeling op de piano zo ingericht als ze zijn. Dit betekent wel dat je een toonladder niet ongegeneerd kan opschuiven. Als ik dezelfde toonladder op een G of een A wil laten beginnen, zal ik dus bepaalde noten moeten "aanpassen" om de lange en korte afstanden op dezelfde plaats in de toonladder te houden. Dat betekent dus zwarte toetsen op de piano en mollen en kruizen in de notenbalk, waar voor zwartetoetsnoten geen eigen lijntje is gereserveerd.

Terug naar de getallen.

Het leuke aan Vader Jacob is dat je het in canon kan zingen. Het wonder van de canon – je zingt verschillende noten, en toch klinkt het niet vals – zit hem erin dat de componist de afstanden, of zoals Pythagoras zou zeggen: de verhoudingen, tussen de tonen die gezongen worden steeds wanhopig hetzelfde probeert te houden.

De afstand tussen "Va" en "Slaapt" is een grote terts en de afstand tussen "Va" en "Al" een kwint.

32. Kun je uit het spieksblad afleiden welk interval er tussen "Slaapt" en "Al" moet zitten?

Volgens Pythagoras betekent het feit dat deze intervallen zo oogverblindend mooi klinken dat er een prachtige eenvoudige getal verhouding bij hoort. $1:2$, $2:3$ en $3:4$ hebben we al gehad. Het wordt dus waarschijnlijk iets met een vijf erin.

33. De verhouding 1:5 zou natuurlijk erg mooi zijn, maar is totaal ongeschikt. Waarom?
34. Liggen de tonen van het interval die horen bij de verhouding 2:5 dichter bij elkaar dan een octaaf of juist verder weg? En die van 3:5? Zou deze verhouding bij een terts kunnen horen?
35. Wat is de 'mooiste' verhouding met een vijf erin die wel als terts kan dienen (dus waarvan de bijbehorende tonen dichter bij elkaar liggen dan in een kwint)?

Dit blijkt de grote terts te zijn. Ga na of er ook een terts klinkt als je de snaar volgens deze verhouding indeelt. In de notenbalk kun je zien dat een grote en een kleine terts samen optellen tot een kwint.

36. Welke snaarlengte-verhouding hoort er dan bij de kleine terts?

Vrolijk of Droevig.

37. Kun je nu ook uitrekenen welke verhoudingen horen bij de grote en de kleine sext? (Als je eerst een grote sext omlaag gaat en dan nog eens een kleine terts, waar kom je dan uit?)
38. Wat is de getalsverhouding tussen de drie noten "Va", "Slaapt" en "Al" als ze tegelijk klinken?

Dit heet een grote drieklank en vormt de basis van veel muziek. Er bestaat ook zo iets als de kleine drieklank. Die is niet echt 'kleiner' dan de grote in de zin dat de tonen dichter bij elkaar liggen: de afstand tussen de laagste en de hoogste is nog steeds een kwint. Het verschil is dat bij de grote drieklank (bv c-e-g) de afstand tussen de eerste twee tonen een grote terts is en die tussen de tweede twee een kleine, terwijl dat bij de kleine drieklank (bv a-c-e) precies andersom is: eerst een kleine terts en dan een grote. Je zou zeggen dat dat niet zoveel scheelt, maar toch klinkt de kleine drieklank veel treuriger en wordt hij als basis voor droevige muziek gebruikt.

39. Bereken de getalsverhouding van de kleine drieklank in mooie gehele getallen.

Het meest hartverscheurende interval is de kleine sext. Alle componisten van Bach tot de Beatles kennen wel de volgende truc: als je de eerste twee tonen van een muziekstuk een kleine sext (omhoog) laat schelen, weet het publiek binnen twee seconden wat voor vlees ze in de kuip hebben en kunnen de zakdoeken te voorschijn worden gehaald.

Pythagoras stelt dat hoe dichter de verhoudingsgetallen van een interval bij 0 liggen, hoe prettiger het voor de mens is om ernaar te luisteren. Lelijke samenklanken zoals bijvoorbeeld een naast elkaar gelegen witte en zwarte toets op de piano hebben zeer hoge verhoudingsgetallen, wil je de verhouding in gehele getallen uitdrukken. Een octaaf daarentegen is maar 1 staat tot 2.

40. Vergelijk de verhoudingsgetallen van de droevige kleine drieklank, kleine sext en kleine terts, met die van hun vrolijke/neutrale tegenhanger: de grote drieklank, de grote sext en de grote terts. Wat zegt dit volgens Pythagoras over de voorkeur van de mens en ben je het daarmee eens?

Het duivelsaccoord

Een bekende truc in filmmuziek is de volgende (als je een piano hebt kun je hem ook thuis gebruiken om je eigen of andermans woorden kracht bij te zetten): In de laagte zweeft al enige tijd een beetje onbestemde toon (bv een lage C), die aangeeft dat er een soort dreiging in de lucht hangt. En als er dan plotseling iets onverwachts gebeurt, waar van duidelijk moet zijn dat het heel eng is (een opengaande deur of zo), dan komt opeens, een flink stuk hoger, de rest van het totaal niet in de toonsoort passende duivelsaccoord er bij. (In het geval van de c wordt dat es-g-b, en dan bij voorkeur niet de dichtsbijzijnde es, g en b, maar een of twee octaven hoger). Is me dat even schrikken, zeg. In één klap zit iedereen weer op het puntje van zijn stoel. De afstanden tussen de vier tonen zijn: (eerste tot tweede): Een octaaf plus een kleine terts, (tweede tot derde) een grote terts en (derde tot vierde) nog een grote terts.

41. Bereken de verhoudingen tussen de tonen van het duivelsaccoord in mooie gehele getallen. Denk je dat Pythagoras van filmmuziek zou hebben gehouden?

Intervallen die ook als niet zo aangenaam te boek staan zijn de grote en de kleine secunde (twee 'naast elkaar' liggende tonen, bv resp. C-D en B-C). Je kunt met behulp van de verhoudingen voor het octaaf de kwint en de terts de bij behorende verhoudingen uitrekenen door een toon te zoeken die ten opzichte van de ene toon bijvoorbeeld een terts en tov van de ander bijvoorbeeld een kwint scheelt.

42. Bereken de verhoudingen van de grote en de kleine secunde (bedenk dat je eventueel een toon nog een octaaf hoger of lager moet maken).

Prachtig, maar wat klopt hier nou niet aan?

Je begrijpt dat Pythagoras erg blij was met zijn ontdekking. Alle afstanden tussen de 8 gebruikelijke tonen van de toonladder te schrijven als mooie verhoudingen tussen nog mooiere gehele getallen. Getallen boven de zestien heb je niet nodig, zo harmonieus zit de wereld in elkaar. Echter bij nadere beschouwing blijkt de wereld toch niet zo mooi in elkaar te zitten als het lijkt.

Bij vraag 42 heb je de verhouding tussen een C en een D, of een willekeurige andere grote secunde uitgerekend. Je hebt dit op globaal twee manieren kunnen doen:

Manier 1: eerst een kwint omhoog naar de g (2:3) en dan een kwart naar beneden (4:3) of eerst een kwart omlaag naar de (lage) g en dan een kwint omhoog.

Manier 2: eerst een grote sext omhoog (3:5) naar de a en dan een kwint (3:2) naar beneden of eerst een kleine terts naar beneden (6:5) naar de a en dan een kwart omhoog (3:4).

43. Op welke manier je het net ook hebt uitgerekend, de vraag is nu om het op de andere manier te doen en de antwoorden te vergelijken.

44. Hoe komt het dat de twee manieren die bij manier 2 staan, geen verschillende antwoorden opleveren?

Je kan begrijpen dat Pythagoras tamelijk ontstemd was over deze uitkomst. Een oplossing zou natuurlijk zijn om de twee d's die hier berekend worden gewoon een verschillende naam te geven. D1 en D2 bijvoorbeeld, genoemd naar de manier waarop ze berekend zijn.

45. Welke toon is lager, D1 (met de verhouding van manier 1) of D2?

46. Bereken de verhouding tussen D1 en D2. Probeer met het monochord na te gaan of zo'n klein verschil in toonhoogte nog wel na te zingen is.

Kiezen of Delen.

Er blijkt in de praktijk natuurlijk geen markt te zijn voor tonen die zo dicht bij elkaar liggen dus de D1/D2 oplossing is vooral leuk voor theoretici. Bovendien blijken er nog meer intervallen te zijn die niet helemaal kloppen. 'Dus', redeneerde Pythagoras, 'wordt het tijd dat iemand hier eens met harde hand de knopen doorhakt en bepaald wie hier de echte D is en wie een halfbakken nep-D', of woorden van gelijke strekking.

Omdat Pythagoras 8:9 mooier vond dan 9:10 en 2:3 en 4:5 mooier dan 3:5 en 5:6 koos hij voor D1.

En omdat hij zijn gezond verstand belangrijker vond dan zijn gehoor voerde hij deze redenering consequent door. Hij riep de kwart en de kwint uit tot de enige echte intervallen (naast het octaaf natuurlijk) en rekende op grond van kwinten en kwarten voor alle tonen in een toonladder uit hoe ze zich verhouden tot de grondtoon. De mooie getalsverhoudingen die hij ooit had gevonden voor de grote en kleine terts vergat hij finaal. Helaas voor hem houdt het menselijk gehoor wel nog steeds van mooie verhoudingen. De tertsen in de zogenaamde Pythagoras toonladder waren dan ook uitgesproken vals.

47. Bereken de verhoudingen van grote (c-e, f-a, g-b) en een kleine (d-f, e-g, a-c) terts in de Pythagorasladder en vergelijk deze met de 'mooie' getalsverhouding. Is de bovenste toon van een terts bij Pythagoras te laag of te hoog? (Hint: ga weer uit van een a van 440 en bereken net zo lang kwinten en kwarten tot je de bij behorende f en c hebt)

Om te zien hoe vals zo'n Pythagoras-terts nou klinkt kun je als je met zijn tweeën bent, het volgende experiment doen. Haal ergens een vast liggende toon vandaan, bij voorbeeld uit een monochord of een glaasje water. Een van beiden zingt de toon zo zuiver mogelijk na. Nu probeert de ander (tegelijkertijd) een toon precies een kwint ("Altijd is Kort") hoger te zingen. Als het precies zuiver klinkt geef je elkaar een veel betekenend knik je waarop de eerst probeert precies een kwart ("bim-bam-bom") lager dan de toon van de tweede te zingen. Zo wissel je elkaar af totdat een van beide (je mag zelf uitrekenen wanneer) een toon zingt die precies een Pythagoreïsche terts scheelt van de oorspronkelijke toon. Op dat moment haalt de ander de oorspronkelijke toon weer uit zijn schuilplaats en probeert hem, zo veel mogelijk zonder zich door de toon die al gezongen wordt te laten beïnvloeden, na te zingen. Kippenvel verzekerd.

Uitleiding: andere oplossingen.

Omdat Pythagoras de enige was die zich op deze manier hiermee bezig heeft gehouden, gold hij eeuwenlang als dé autoriteit op dit gebied en zijn toonladder is eeuwen na zijn dood nog gebruikt, hoe vals hij ook klonk. In plaats van dat men aan de toonladder twijfelde vond men sommige intervallen gewoon lelijk. Samenklanken die een terts schelen (in de tegenwoordige tweestemmige muziek verreweg het meest gebruikelijk) kwamen in de Middeleeuwse muziek niet of nauwelijks voor. In de renaissance begonnen mensen als o.a. Galileo er weer over na te denken en probeerden ze de toonladder te verbeteren. In de zeventiende eeuw was het gebruikelijk clavecimbel zo te stemmen dat één toonsoort er perfect zuiver op klonk, met 'echte' tertsen en sexten. Toonsoorten die voor het grootste deel de zelfde tonen gebruikten (bijvoorbeeld omdat de grondtoon een kwart scheelt met die van de 'perfecte' toonsoort) klonken dan ook nog wel aardig, maar sommige andere toonladders klonken dan weer nog valser dan bij Pythagoras. Ook de gaten in blaasinstrumenten werden volgens dit idee geboord. Dat een klarinet een 'bes-instrument' is, betekende toen dus ook echt wat. Later werd dit steeds meer aangepast zodat er meerdere toonsoorten op een instrument gespeeld kunnen worden. De zuiverste toonsoorten werden iets valser en de valste wat zuiverder. Een beetje een compromis dus, maar de verschillen tussen de toonsoorten bleven bestaan. Alleen werd dit niet meer als 'vals' of 'zuiver' beschreven, maar als het 'eigen karakter' van toonsoorten. (Vandaar dus ook dat componisten bewust voor een bepaalde toonsoort kozen, en niet alleen om de uitvoerende muzikanten te imponeren met grote hoeveelheden mollen en kruizen). Tegenwoordig wordt meestal 'gelijkzwevende stemming' toegepast. Hierin is het octaaf in twaalf precies gelijke stukken verdeeld. Op welk van de twaalf tonen je ook begint, een toonladder klinkt altijd hetzelfde (als je de goede noten speelt tenminste). Ieder interval, met uitzondering van het octaaf, is precies even vals (of zuiver, net hoe je het noemen wil) en mooie verhoudingen zoals Pythagoras die graag zag komen naast de 1 staat tot 2 van het octaaf niet meer voor. De verhouding behorend bij de kleinste afstand in de toonladder (de halve toon, of kleine secunde) bijvoorbeeld tussen een b en een c of tussen een e en een f is nu gelijk aan de twaalfde-machtswortel van 2. Dat Pythagoras zich bij het horen van dit getal in zijn graf zou omdraaien blijkt wel uit het volgende hoofdstuk.

4. Het geheim van wortel twee. Moord en doodslag onder de Pythagoreërs.

Het is in de geschiedenis van de mensheid vaak voorgekomen dat mensen werden vermoord om een idee. Maar als dat idee te maken heeft met getallen, en met niets anders dan getallen, dan kan zo'n moord alleen maar plaatsvinden binnen een sekte waar alles in termen van getallen beschouwd wordt, van de miezerigste zandkorrel tot het grootste natuurgeweld. Zoals je weet waren de Pythagoreërs toevallig zo'n sekte, en zij vormen dan ook het décor voor het volgende gruwelijke verhaal.

We verplaatsen ons naar het zon overgoten Griekse eiland Samos, aan het eind van de vijfde of het begin van de vierde eeuw voor Christus. Pythagoras zelf is al enige

jaren dood, maar zijn gedachtengoed leeft nog in alle hevigheid voort onder zijn volgelingen. En een van de belangrijkste ideeën daarbij was dat alles is terug te voeren op gehele getallen en verhoudingen daartussen.

De verhouding tussen de omtrek en de doorsnede van een cirkel was misschien niet helemaal gelijk aan 3 staat tot 1 of 22 staat tot 7, maar als je maar lang genoeg door zou zoeken waren er ongetwijfeld wel twee astronomisch grote getallen die deze verhouding precies zouden weergeven. Daar werd verder niet over na gedacht. Natuurlijk was dat zo. Hoe zou het anders kunnen zijn?

Helaas voor hem, was er een lid van de sekte die er wel over nadacht. Waarschijnlijk ergerde hij of zij zich eraan dat het zo moeilijk was om voor sommige verhoudingen goede getallen te vinden en probeerde hij een andere manier te vinden om dit wat te versnellen.

Hij deed dit niet bij de omtrek en doorsnede van een cirkel, maar bij een heel wat rechtlijniger geval: de verhouding tussen een korte en de lange zijde in een gelijkbenige rechthoekige driehoek (een schuin doorgeknipt vierkant dus).

48. Hoe zouden wij deze verhouding noemen?

Je probeert eens wat...

De oude manier zag er waarschijnlijk ongeveer zo uit. Je vergrootte de driehoek een aantal keer (bijvoorbeeld 2) en keek met je passer of de 'oude' korte zijde nu een geheel aantal keren in de 'nieuwe' lange paste. Nou, niet gek bijna drie keer. Je komt alleen net een stukje te kort. Je maakt een schatting van hoe het te kort komende stukje zich verhoudt tot de oude korte zijde. Dat lijkt wel verdacht veel op twee drieëntwintigste! Wat gebeurt er als je de zijdes van de nieuwe driehoek nog eens drieëntwintig keer zo lang maakt?

49. Hoe vaak zou volgens deze schatting de oude korte zijde dan in de nieuwe lange passen? Hoe zou dan de verhouding tussen de twee zijden zijn? Is dit ook in werkelijkheid de verhouding?

50. Maak een schatting van het stuk dat je dan overhoudt of te kort komt. Welke verhouding zou dan de volgende kanshebber zijn?

Tijd voor een systematische aanpak.

De jonge held van dit verhaal, laten we hem Anximedes noemen (zijn echte naam is helaas niet bekend), vond deze manier maar niks. Hij besloot de zaak van een andere kant te benaderen door de vraag te stellen: 'Wat weten we eigenlijk nog meer van de verhouding tussen deze twee lijnstukken?'.

51. Wat weten we eigenlijk nog meer van de verhouding tussen deze twee lijnstukken?
(HINT: als je niet zo gauw iets kan bedenken kun je misschien beter de vraag stellen: wat weten we van de verhouding tussen de kwadraten van deze twee lijnstukken?)

Anximedes paste vervolgens een truc toe, die in zijn tijd nog niet zo bekend was, maar later uitgroeide tot de voornaamste bezigheid van wiskundigen waar ook ter wereld: als je van iets weet dat het bestaat, maar niet hoeveel het is, dan geef je het gewoon zelf een naam. "x" Bijvoorbeeld.

Als rechtgeaarde Pythagoreeër wist Anximedes dat er twee getallen waren die tot elkaar in de zelfde verhouding stonden als de diagonaal en de zijde van een vierkant. Hij wist zelfs dat er een heleboel getallen waren die deze verhouding opleverden

52. Op hoeveel manieren kun je de verhouding 294 staat tot 210 schrijven?

Om deze getallen nou allemaal een aparte naam te geven, leek Anximedes wat overdreven.

53. Als je nou een paar van twee getallen uit moest kiezen om de verhouding 294 staat tot 210 op te schrijven, zó dat het het makkelijkst is om daaruit alle andere paren uit te rekenen, welke twee getallen zou je dan kiezen? Hoe vind je vanaf hier de andere getallen?

Anximedes besloot slechts twee (gehele) getallen aan te wijzen die hij p en q noemden (want eigenlijk kende hij ze nog niet), zodat:

- p/q de verhouding is tussen de schuine en de rechte zijde in de driehoek.
 - Alle andere getallen die ook deze verhouding hebben kunnen worden gevonden door p en q alle bij met hetzelfde gehele getal te vermigvuldigen.
54. Wat weet je nog meer over p en q naast de eigenschap die je bij 50 hebt gegeven?
(Aanwijzing: als je bijvoorbeeld weet dat p deelbaar is door 3, wat weet je dan van q ?)

Gewapend met deze twee eigenschappen wilde Anximedes het probleem te lijf gaan. Hij wist dat als je van twee getallen twee verschillende eigenschappen kende, je de getallen (bijna) altijd kon opsporen en wilde dat in dit geval dus ook doen. Hij zou echter nog van een koude kermis thuiskomen.

Anximedes versus de koude kermis.

Kijk nog eens naar de eigenschap die je bij vraag 50 hebt opgeschreven.

55. Door welk getal moet p^2 dan wel deelbaar zijn?

Anximedes vroeg zich af of hij hieruit ook een conclusie kon trekken over p zelf. Als je weet dat 6 kwadraat oftewel 36 deelbaar is door 3 dan betekent dat automatisch dat je 6 zelf ook door drie kan delen. Dat zelfde geldt voor bijvoorbeeld 144 (twaalfkwadraat) en 225 (vijftienkwadraat) en eigenlijk alle kwadraten die deelbaar door drie zijn.

56. Kun je bewijzen dat als een kwadraat deelbaar is door 3, dat de wortel van dat kwadraat ook deelbaar door drie moet zijn?
(HINT: stel je voor wat er met het kwadraat gebeurt als de wortel NIET deelbaar door 3 is)

Aan de andere kant merkte Anximedes op dat het feit dat 36 deelbaar is door 9 of door 12 helemaal niet wil zeggen dat 6 dat ook moet zijn. En het zelfde geldt voor 144 dat deelbaar is door 8 terwijl je dat van zijn wortel, 12, niet bepaald kan zeggen.

57. Waarin zit 'm het kenmerkende verschil?

58. Kun je op grond van vraag 54 nu wel of niet ook een conclusie trekken over p zelf? En zo ja: welke?

59. Wat heeft dit weer voor gevolgen voor q ? En voor q^2 ?
60. Bedenk dat de eigenschap van p die je bij 57 hebt gevonden ervoor zorgt dat p^2 nu ook deelbaar is door een getal dat 'nog' groter is dan het getal dat je bij vraag 54 gevonden hebt. Welk getal?
61. Deel p^2 door dit getal en noem de uitkomst bijvoorbeeld a^2 . Is a^2 een geheel getal?
62. Schrijf de eigenschap van vraag 50 nog eens op maar vervang p^2 nu door het getal van vraag 59 maal a^2 . Kun je deze vergelijking vereenvoudigen door links en rechts door het zelfde te delen?
63. Kijk naar deze nieuwe vergelijking. a^2 En q^2 zijn allebei gehele getallen. Door welk getal moet q^2 dus wel deelbaar zijn?
64. Vergelijk het antwoord op vraag 62 met dat op vraag 58. Hoe kan dit?!?

Hoe kan dit?!?

'Hoe kan dit?!?' moet Anximedes zich hebben afgevraagd. En eigenlijk lag het antwoord erg voor de hand: hij moest ergens een fout gemaakt hebben, dat kon niet anders.

Het eerste waar je aan zou denken is een fout in de logische redenering. Hij had vast ergens een redenering van het type 'alle ezels hebben oren, Pythagoras had oren, dus Pythagoras was een ezel' hebben gebruikt, maar dan iets beter verborgen.

65. Lees je eigen redeneringen bij vraag 54 t/m 63 nog eens door. Kun je zo'n fout of een andere redeneerfout ontdekken?
66. Toen hij zich ervan overtuigd had dat de fout niet in de logische redenering zat, zag Anximedes in dat er dan maar één conclusie overbleef. Welke?

De dodelijke conclusie.

Als de fout niet in de logische redenering zat, dan moest hij wel in het uitgangspunt zitten. Een andere mogelijkheid was er niet. Maar als het idee dat er een p en q bestaan met deze eigenschappen niet klopte, als de gehele getallen p en q die deze verhouding weergaven dus gewoon niet bestonden, dan betekende dat, dat er getallen bestaan die niet als de verhouding tussen twee gehele getallen geschreven konden worden.

Je begrijpt wat een klap dit gegeven moet hebben bij de Pythagoreeërs die dit idee jarenlang als de grootst mogelijke onzin zouden hebben beschouwd, als het al in hun hoofd was opgekomen. Toen Anximedes de anderen vol trots van zijn ontdekking kwam vertellen werd hij dan ook, toen de anderen hadden ingezien dat ze echt niet om dit bewijs heen konden, met een steen aan zijn voeten in de Middellandse Zee gekieperd. Wegens belediging van de heilige wet of iets anders onacceptabels. Toch hebben de Pythagoreeërs het idee uiteindelijk geaccepteerd. Er is zelfs een versie van het verhaal waarin ze Anximedes helemaal niet vermoorden, maar wel het geheim dat er zulke getallen als wortel 2 bestonden, zorgvuldig binnen hun sekte te houden. Volgens deze versie van het verhaal geloofden ze namelijk dat wanneer de buitenwereld (die veel en dankbaar gebruik maakte van vooral de meetkundige ontdekkingen van de Pythagoreeërs) hier lucht van zou krijgen, er vreselijke paniek

uit zou breken onder het volk, met niet te overziene, gruwelijke gevolgen. Toen een van de sekteleiden ondanks het uitdrukkelijke verbod, het geheim toch aan een Siciliaanse koopman vertelde, werd hij alsnog met een steen aan zijn benen in de Middellandse Zee gekieperd.

Je moet zelf maar kiezen welke versie van het verhaal je gelooft.